Wolters-Noordhoff

Organ van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Vakblad voor de wiskundeleraar

Euclides

4

jaargang 66 1990 | 1991 december

● **Euclides** ● ● ● ●

Redactie

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle, tel. 038-53 99 85.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt ƒ55,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. ƒ37,50; contributie zonder Euclides ƒ30,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam. Zij dienen machinaal geschreven te zijn en bij voorkeur te voldoen aan:
- ruime marge
- regelafstand van 2
- 48 regels per kolom
- maximaal 47 aanslagen per regel
- liefst voorzien van (genummerde) illustraties
- die gescheiden zijn van de tekst
- aangeleverd in zo origineel mogelijke vorm
- waar nodig voorzien van bijschriften

De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Abonnementen niet-leden

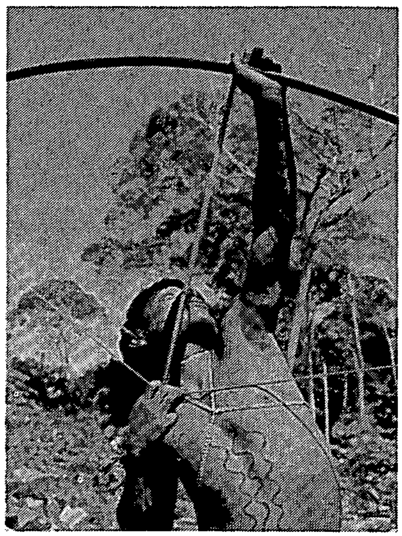
Abonnementsprijs voor niet-leden ƒ58,00. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement ƒ37,00.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. Verkoopadministratie, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86.
Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers ƒ9,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties

Advertenties zenden aan:
ACQUI' MEDIA, Postbus 2776, 6030 AB Nederweert.
Tel. 04951-2 65 95. Fax. 04951-2 60 95.

ISSN 01.65-0394

Inhoud



... vogelschieten met pijl en boog.

In memoriam Hans Freudenthal

Joop van Dormolen

Freudenthal is overleden. Hij is 85 jaar geworden. Hij is voor het reken- en wiskunde-onderwijs in Nederland en daarbuiten van grote betekenis geweest. Hij was erelid van de Vereniging van Wiskundeleraren.

Ik kwam voor het eerst direct met Freudenthal in aanraking als studerende. Ik moest tentamen groepentheorie bij hem doen. Hij vroeg me van alles en liet me modderen met problemen die ik steeds maar niet op kon lossen. Ik voelde me steeds moedelozer worden en wist dat ik zou zakken. Hoe verbaasd was ik toen hij me tenslotte een 8 gaf en ik was naïef genoeg om te vragen waarom ik dat cijfer kreeg. Ik had toch niets opgelost. Hij gaf me te kennen, dat ik een dwaze vraag had gesteld: ik was toch goed bezig geweest met wiskunde en waar haalde ik het idee vandaan dat alle problemen in de wiskunde opgelost kunnen worden? Dat was mijn eerste les in een visie dat wiskunde een menselijke activiteit is. Tot dan toe geloofde ik dat wiskunde een (prachtig) gesloten systeem is, dat je kunt leren als je daartoe de aanleg hebt. Ik had nooit beseft, dat je wiskunde ook zelf kunt bouwen, zelf kunt creëren, al heb je daar meestal wel de hulp van een meer deskundige leraar bij nodig, of de medewerking van anderen, die ongeveer op hetzelfde niveau zijn als jezelf.
Behalve via directe contacten kwam ik veel met Freudenthal in aanraking via zijn boeken en artikelen. Boeken als *Mathematics as an educational task*, *Weeding and sowing* en *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren* maakten grote indruk. Wie zulke boeken leest, komt steeds weer onder de indruk van Freudenthals kunde om fundamentele dingen als iets gewoons en vanzelfsprekends voor te stellen. Je krijgt telkens het gevoel dat dat nu juist precies is wat je had willen zeggen en je vraagt je af waarom je dat zelf niet had kunnen bedenken. Zoals dat ook op het tentamen gebeurde.
Hier is voor mij Freudenthals boodschap. Het besef dat we bij ons leren gebruik maken van de ervaringen en mogelijkheden die we op dat moment al hebben, al zijn we ons niet van die mogelijkheden bewust. Het besef dat het aanbieden van kant en klare structuren, die op dat moment voor ons geen betekenis hebben zinloos is, en op de lange duur alleen maar succesvol is voor de hoog-gemotiveerden met een wiskunde-knobbel. De boodschap bestaat erin, dat de leraar in feite twee opdrachten heeft. De leerlingen moeten probleemsituaties voorgelegd krijgen die ze, met hulp van de leraar en medeleerlingen, met eigen kunde en kracht kunnen begrijpen en oplossen. Dat is de ene opdracht. Daarnaast moet de leraar er voor zorgen dat leerlingen tijdens hun bezigheden in aanraking komen met nieuwe inhouden, vormen, structuren, ook al beseffen ze dat op dat moment niet. Zodat ze later weer nieuwe problemen kunnen oplossen.
Dit ligt aan de basis van Freudenthals opvattingen over realistisch wiskunde-onderwijs. Een onderwijs dat zich baseert op vroegere leerervaringen van de leerlingen, en dat zodanig opgebouwd is, dat er ook zuivere wiskunde uit voort kan komen. Freudenthal trok daar zelf de consequentie uit. Hij hield op met actief wiskunde-onderwijs en -onderzoek op de universiteit en ging op basisscholen zitten luisteren naar en werken met kinderen. Daaraan hebben we veel fundamentele kennis te danken over de manier waarop leerlingen bezig kunnen zijn met wiskunde. Wiskunde als *common sense* en niet als een moeilijk vak, waarvan je later pas leert waar je het nodig voor hebt.

In de Joodse traditie bestaat een gebed voor een overledene. Daarin wordt gezegd: „Zijn geest zal gebonden blijven in de bundels van het leven”.

● Actualiteit ● ● ● ●

▶ Wiskunde voor 12-16 jarigen

Arie van Marle

Het afgelopen cursusjaar met plezier wiskunde gegeven in de vierde klas MAVO. Het keuzepercentage voor het vak wiskunde lag rond 95%, evenredig verdeeld over meisjes, jongens, allochtonen en autochtonen. De examenopgaven waren interessant. De verhouding 50% – 50% tussen meerkeuzevragen en open vragen werd door de leerlingen gewaardeerd.
Bij de afsluiting van het cursusjaar behoort onvermijdelijk het sorteren en opruimen van de in de loop van de maanden binnengekomen papiermassa. Al sorterend komen de COW-publikaties rond basisvorming, eindtermen en wiskunde voor 12-16 jarigen te voorschijn.
Los van dit materiaal kun je filosoferen over wijzigingen en/of aanpassingen die je als leraar in de huidige situatie door zou willen voeren.
Hierover enkele gedachten:
* Bij de vakken wiskunde, economie, natuurkunde en scheikunde treden problemen op als een beroep gedaan wordt op de rekenvaardigheid van de leerlingen:
- rekenvaardigheid met eenvoudige getallen geeft problemen;
- getalinzicht is niet sterk;
- schatten van antwoorden gaat gebrekkig;
- bij vermenigvuldigen en delen ontbreekt routine;
- kennis van het metriek stelsel is oppervlakkig.

Welke waardevolle didactische vernieuwingen er ook in het basisonderwijs optreden, het is een taak van het basisonderwijs hiervoor duidelijke eindtermen op te stellen en te bereiken. Gezien mijn ervaring op de vroegere 'lagere school' weet ik, dat dit haalbaar is. Een betere rekenvaardigheid geeft de leerlingen bij bovengenoemde vakken een gustiger uitgangspositie.
In een later stadium de rekenvaardigheid trachten te verbeteren, leidt praktisch altijd tot teleurstellingen. De rekenmachine is hiervoor zeker geen geschikt hulpmiddel.
* Sinds de ingrijpende overgang naar de 'moderne wiskunde' in 1968 is er in de erop volgende jaren een geleidelijke evolutie opgetreden naar de huidige situatie.
Hierbij is veel bereikt, dat waardevol is.
Een duidelijk inzicht, hoe het aansluitende beroepsonderwijs hiermee verder werkt, ontbreekt. Een inventarisatie van de problemen en/of hiaten bij deze overgang zou leerzaam en wenselijk zijn.
* De omvang en de inhoud van de leerstof zijn nauwelijks gewijzigd. Een kritische doorlichting is zinvol. Bepaalde leerstofdelen, zoals bijvoorbeeld het onderwerp vectoren op de MAVO, kunnen ter discussie staan.
* In de praktijk voor de klas kunnen zich nieuwe werkvormen ontwikkeld hebben die waardevol genoeg zijn om nader uitgewerkt te worden.
* De rekenmachine is en blijft een hulpmiddel, dat niet in een te vroeg stadium z'n intrede moet doen. Gebruik ervan bevordert de rekenvaardigheid noch het getalinzicht.
* De computer heeft op de scholen zijn intrede gedaan. De meeste scholen zijn uitgerust met uitstekende hardware. Gebruik hiervan in de praktijk is nog lang niet optimaal.
Oorzaken hiervan zijn:
- het gebrekkig functioneren van bepaalde netwerken;
- een wildgroei in alle mogelijke software programma's;
- het ontbreken van lesbladen bij software programma's;
- weinig aansluiting tussen software en methode;
- het ontbreken van tijd en/of deskundigheid voor het inrichten en onderhouden van netwerken.
Op dit gebied is coördinatie dringend noodzakelijk.

Wiskundeonderwijs in de huidige vorm heeft tal van waardevolle elementen en verdient de kans verder ontwikkeld te worden.
Tegen de achtergrond van het bovenstaande de publikaties van de COW nog een keer doorgenomen. Hierbij doemen een groot aantal vraagtekens op:
** Waarom worden tekortkomingen in rekenvaardigheid doorgeschoven naar de basisvorming in het voortgezet onderwijs en niet teruggekoppeld naar het basisonderwijs? Indien dit toch een taak van het voortgezet onderwijs moet zijn, waarom dan alleen bij het vak wiskunde?
** Waarom wordt geen enkele poging gedaan om de huidige situatie te evalueren? Gemist wordt bijvoorbeeld een beschouwing van de nu gangbare wiskundemethodes. Bevatten deze methodes geen positieve aangrijpingspunten?
** De vijf in 1987 opgestelde didactische uitgangspunten bieden niet veel nieuws. Elke leraar voor de klas doet elk lesuur bescheiden pogingen in die richting. In de uitwerking wordt 'het uitgaan van praktische situaties' door de commissie wel erg ver doorgedreven. Na de uitwerking van een praktische situatie krijgt de oefening en het opdoen van routine bij het oplossen van meer abstracte vraagstukken nauwelijks aandacht. (Wordt dit verder geheel overgelaten aan docenten en auteurs?) Dit kan tot gevolg hebben, dat een aantal onbetaalde rekeningen doorgeschoven wordt naar het vervolgonderwijs.
** Heeft de commissie enige praktische ervaring op het gebied van groepswerk in heterogene groepen bij klassen van 30 leerlingen? Zijn uit het testen van het materiaal al gegevens beschikbaar over het individuele rendement voor de leerlingen?
** Op het terrcin van de computer had de commisie baanbrekend werk kunnen verrichten. In de publikaties wordt op dit gebied weinig uitgewerkt.
** Het terrein van de statistiek krijgt vrij veel aandacht. Echter: dit onderwerp speelt ook bij de vakken natuurkunde, scheikunde, aardrijkskunde en economie een belangrijke rol. Een zekere afbakening per vak is wenselijk, ook wat de keuze van opgaven betreft. Beter zou zijn te omschrijven hoe op dit gebied tot een samenwerkingsvorm gekomen kan worden.
** Kan het vervolgonderwijs uit de voeten met leerlingen die opgeleid zijn in een soort ervaringswiskunde of dreigt er eenzelfde problematiek te ontstaan als op het gebied van de rekenvaardigheid?

Op mij als wiskundeleraar heeft het doorlezen van de publikaties een tamelijk demotiverende invloed, omdat voorbijgegaan wordt aan al het bereikte in de huidige situatie.
Graag zou ik wat meer weten over de resultaten van de experimenten om na te kunnen gaan of beoogde doelen ook werkelijk bereikt worden.
De uitwerking van het geheel zal voornamelijk op de schouder van de leerkracht komen, die moet beginnen aan iets waarvan de resultaten nog verborgen zijn. Geen opwekkende gedachte in de toch al vage problematiek van eindtermen, basisvorming in het voortgezet onderwijs en wat er verder nog volgt.

Over de auteur:
A. van Marle is sinds 1969 leraar aan de Immanuël-mavo te Alphen a.d. Rijn. Hij is Sigma-auteur.

Mededeling

Lidmaatschap VVWL

Lidmaatschap 1991 van de Vlaamse Vereniging Wiskunde Leraars en abonnement op Wiskunde en Onderwijs (4 nummers), jaargang 17, 1991:
Het lid- en leesgeld voor 1991 bedraagt voor leden van de NVvW *f* 35,– in plaats van *f* 40,–, te storten op rek. N.C.B., Putte NB., 0.23 98 21 351 t.n.v. T. Coppens, Selstbaan 24, B-2950 Kapellen. Vriendelijk verzoek dit bedrag spoedig over te schrijven, in elk geval vóór 1 februari 1991.

▶ Werk aan de winkel

M.C. van Hoorn

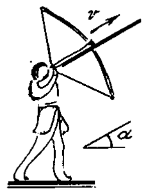
In oktober en november vonden er twee keer tien regionale bijeenkomsten plaats, waar het concept-examenprogramma mavo/lbo-C/D werd gepresenteerd en bediscussieerd. De belangstelling voor deze bijeenkomsten was massaal: in totaal werden ze door zo'n 1100 wiskundeleraren bezocht.
Als we proberen de bijeenkomsten na te beschouwen, kunnen we vaststellen dat het geslaagde bijeenkomsten zijn geweest. Voor de COW en het team W 12-16 is er nu heel wat werk aan de winkel.

Er was een stortvloed aan informatie, waarin niet onmiddellijk voor iedereen een structuur zichtbaar was. 'Waarop is dit alles gebaseerd?', zo vroegen velen zich af. Ondertussen was er waardering voor de serieuze poging een nieuw programma van de grond af op te bouwen – al bleven de fundamenten onzichtbaar.
Wie bouwt, moet zorgen voor een degelijke constructie. Men mag aannemen dat daarvoor oog geweest is. In dat licht bezien is het merkwaardig, dat op verscheidene (of: alle?) bijeenkomsten de hoop uitgesproken werd dat de auteurs van methodes er in zullen slagen het programma om te smeden tot een samenhangend geheel.
We laten nu maar onbesproken, dat enkele jaren geleden in een intern COW-stuk alle bestaande methodes een veeg uit de pan kregen, omdat ze geen van alle zouden voldoen aan de eisen des tijds. De tijden veranderen.

Méér dringend is een andere kwestie. Er werd alleen een concept-programma voor mavo/lbo-C/D gepresenteerd. Dáár zit de modale 12-16-jarige leerling. Maar niet alle 12-16-jarige leerlingen zitten daar. Het lijkt nu, alsof het niet nodig is een schets te geven van de programma's voor de lbo-A/B-leerlingen en de havo/vwo-leerlingen.
Men kan stellen, dat al deze leerlingen het C/D-programma in verdunde of geconcentreerde vorm toch wel krijgen. Recentelijk verwoordde Smid nog deze gedachte (zie Euclides 66-3). Er valt ook wel iets voor te zeggen natuurlijk, mede gelet op de ervaringen in brede scholengemeenschappen. Maar zou wat meer specifieke aandacht voor al de leerlingen die niet de C/D-route nemen niet op z'n plaats zijn?
We herinneren in dit verband aan een COW-opinie, die in het voorjaar van 1989 nog gold: toen bleek dat de COW twee niveaus voor de eindtermen voor de basisvorming te weinig vond. Ook op de hoorzittingen, die destijds over de eindtermen voor de basisvorming werden gehouden, spraken velen van de aanwezige wiskundeleraren zich uit voor drie niveaus (zie Euclides 64-9).
Tegen haar zin herschreef de COW de eindtermen, in opdracht van de Staatssecretaris, tot op twee niveaus. (Intussen zijn deze eindtermen, thans kerndoelen geheten, door ànderen herschreven tot op één niveau.)
De lbo-A/B-leerlingen en de havo/vwo-leerlingen volgen een eigen leerroute. Verdienen hun leerroutes niet evenveel aandacht als de C/D-routes?
Ten aanzien van deze kwestie lijkt er zeker ook werk aan de winkel te zijn.

▶ Buiten schot

Ir. Henk Mulder

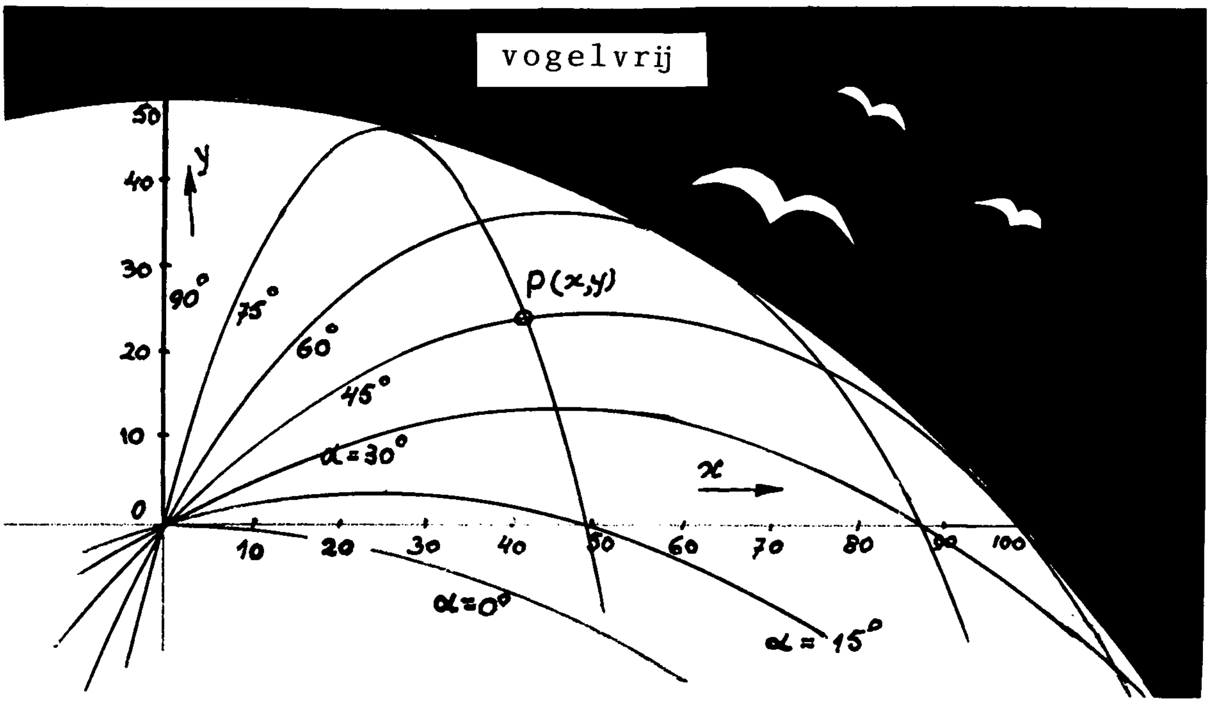


Tot mijn beste herinneringen behoren de reizen die ik maakte naar het oerwoud van Guyana, het land van de indianen. Met hen ging ik mee op jacht, vogelschieten met pijl en boog. Het viel mij op dat als een indiaan aanlegde en de boog spande, de vogels er vaak al vandoor gingen. Maar... vogels hoog in de bomen of voldoende ver weg, hielden ons wel in de gaten, maar voelden zich kennelijk 'buiten schot'. Als je weet met welke beginsnelheid pijlen worden afgeschoten, is dan te bepalen waar de grens ligt voor het 'vogelvrij'-gebied?
Omdat het probleem rotatiesymmetrisch is, kunnen we volstaan met een analyse in het platte vlak.

Schietkrommen

In fig. 1 hebben we paraboolbanen geschetst die pijlen beschrijven, die vanuit de oorsprong met eenzelfde beginsnelheid v worden afgeschoten. De variabele is de starthoek α. De krommen zijn getekend voor hoeken vanaf 0°, opklimmend met 15°. In de artikelen 'Sport en wiskunde' 3 en 4 (Euclides 63-8 resp. 64-1) stond de vergelijking van zo'n parabool met parameter α.

$$y = -\frac{g}{2v^2}(1 + \tan^2\alpha)x^2 + (\tan\alpha)x \qquad (1)$$



Figuur 1

De constante $\frac{g}{2v^2}$ stellen we c (g is de gravitatieversnelling). In fig. 1 hebben we gekozen voor een waarde $c = 0{,}005$, waaruit volgt bij $g = 10\,\text{m/s}^2$, een beginsnelheid $v = 31{,}6\,\text{m/s}$.
Het is niet moeilijk om te berekenen dat het eventuele tweede snijpunt met de x-as ligt op $x_2 = \frac{\tan\alpha}{c(1 + \tan^2\alpha)}$ en de eventuele top bij elke kromme halverwege, op een hoogte $h = \frac{\sin^2\alpha}{4c}$ (2)
In de volgende tabel staan naast elkaar de berekende waarden: eerst hoek α in graden en dan x_2 en h in meter.

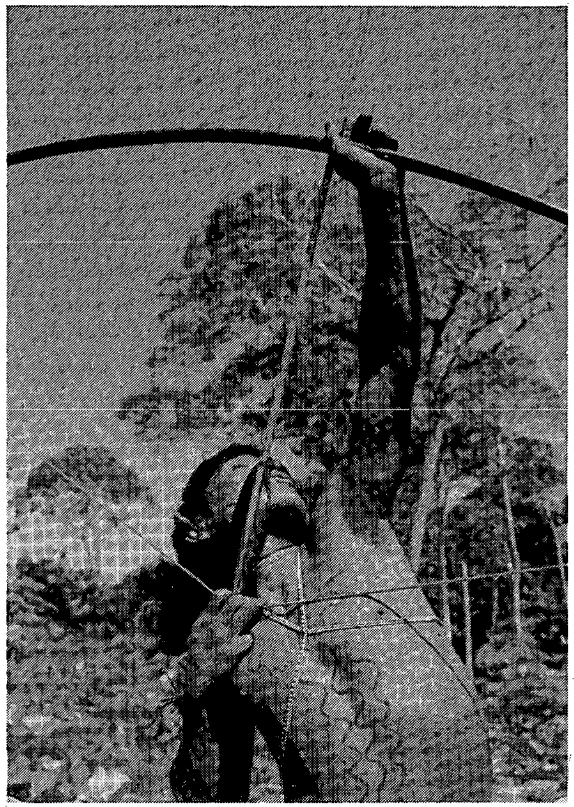
α	$x_2(m)$	h(m)
15°	50	~3,3
30°	~87	$12\frac{1}{2}$
45°	100	25
60°	~87	$37\frac{1}{2}$
75°	50	~47
90°	0	50

Krommen door een punt

Het valt op dat in het witte gebied van fig. 1, door elk punt P met coördinaten x en y, telkens twee schietkrommen gaan; in het getekende geval met parameters $\alpha = 45°$ en 75°. Dat volgt direct uit vergelijking (1).
Immers, als we daar de coördinaten van het gekozen punt P invullen, houden we een kwadratische vergelijking in $\tan\alpha$ over, die twee oplossingen kan hebben.
Een vogel in het witte gebied kan dus vanuit twee hoeken raak geschoten worden. Er wordt in principe altijd voor de kleinste hoek gekozen, omdat de pijl langs die parabool het snelst het doel bereikt.
Schrijven we nu (1) als een vergelijking met variabele $\tan\alpha$:

$$cx^2(\tan^2\alpha) - x(\tan\alpha) + (cx^2 + y) = 0 \qquad (3)$$

In het witte gebied zijn er dus twee oplossingen. In het zwarte, vogelvrije gebied, geen. En, u ziet het al aankomen, op de grens verschijnt maar één waarde voor $\tan\alpha$.



Indiaan (Frans Guyana) schietend onder 75°

Grenskromme

De grenskromme volgt dus door te stellen: discriminant = nul.
Ofwel:
$x^2 - 4cx^2(cx^2 + y) = 0$

$$4cy = 1 - 4c^2x^2 \qquad (4)$$

En dit is dan de gezochte grenskromme, weer een parabool met de y-as als symmetrie-as en de top gelegen op $y = \frac{1}{4c}$ en dat is juist het hoogste punt (zie 2) voor het geval we recht omhoog schieten met $\alpha = 90°$.

Deze grensparabool snijdt de x-as in $x_2 = \frac{1}{2c}$, hetgeen juist het tweede snijpunt is van de schietkromme onder $\alpha = 45°$.
Het brandpunt van de parabool valt samen met de oorsprong. Alle schietparabolen raken de grensparabool, maar niet in de top. Men kan bewijzen dat ook voor negatieve starthoeken of hoeken groter dan 90°, de theorie geldt.
Als uzelf de grenskromme in beeld wilt brengen, dan neemt u een tuinslang en spuit in velerlei richtingen langs een vertikale muur. Het natte deel is dan juist het witte gebied van fig. 1.



Henk Mulder probeert het eens onder 15°

● Serie ● ● ● ● ●

'Wiskunde in vervolgopleidingen'

▶ Wiskunde in de landbouwwetenschappen

A. Arnoldussen - van der Lugt,
O. A. van Herwaarden

De Landbouwuniversiteit Wageningen

De landbouwwetenschappen zijn vergeleken met zo'n 30 jaar geleden sterk van karakter veranderd. Zo zijn er aan de Landbouwuniversiteit Wageningen (LUW) nu 20 studierichtingen waaruit de student kan kiezen. Naast de vakgebieden die er van oudsher waren (tuin- en landbouwplantenteelt) zijn er richtingen gekomen zoals moleculaire wetenschappen, bio(techno)logie, meteorologie, voeding, milieuhygiëne, visteelt, agrarische economie en zo meer. De bijbehorende stof wordt verzorgd in 70 vakgroepen, waarvan de vakgroep wiskunde er één is en wel een zogenaamde basisvakgroep.
De vakgroep is onderverdeeld in drie secties, elk met een leerstoel:
- Zuivere en Toegepaste Wiskunde (ZTW)
- Wiskundige en Toegepaste Statistiek (WTS)
- Operationele Analyse (OA)

ZTW en WTS verzorgen onder meer basisonderwijs, resp. in het eerste en tweede trimester van de propaedeuse.
Naast enig eigen onderzoek, dat bij ZTW gegroepeerd is rond modellen voor fysisch transport, stroming van vervuild grondwater, biomathematica, en bij de andere secties rond de onder die leerstoelen vallende onderwerpen, participeren verschillende medewerkers in onderzoek van andere vakgebieden. Ook komen er veel verzoeken om advies op de medewerkers af van studenten of stafleden van andere vakgroepen.

In dit artikel willen we hoofdzakelijk ingaan op de onderwijsperikelen in het eerste trimester van de propaedeuse.

Vooropleiding en motivatie

Er stromen jaarlijks zo'n 1200 studenten in, die grotendeels uit het vwo komen langs twee wegen:
óf met natuur- en scheikunde als verplichte eindexamenvakken, waar dan meestal wiskunde bij is opgenomen;
óf met alleen wiskunde als verplicht eindexamenvak. Dit is dan vrijwel steeds wiskunde A.
Daarnaast komen enige honderden studenten binnen via het hoger beroepsonderwijs of anderszins; in dat geval is de wiskunde-vooropleiding nogal variërend en vaak summier.

De motieven die leiden tot een studie in Wageningen zijn uiteraard veelsoortig. Er hoort vrijwel zeker geen belangstelling voor de wiskunde bij, misschien met uitzondering van enkele richtingen zoals bodem, water en atmosfeer, landbouwtechniek, agrosysteemkunde. Maar zelfs dan is het niet het hoofdmotief. De wiskundekennis en -vaardigheid, gemeten naar de eindexamencijfers is geringer dan die van studenten aan technische universiteiten, namelijk gemiddeld zes.

Alle studenten krijgen in het eerste propaedeusetrimester wiskunde, waarbij ze, afhankelijk van hun voorkennis kunnen kiezen uit twee pakketten die aansluiten óf bij wiskunde B óf bij A van het vwo. In beide pakketten wordt dezelfde stof behandeld, zij het in een enigszins verschillende volgorde en voor enige onderdelen zoals integreren met een verschillende diepgang. Elk der pakketten geeft met een voldoende examenresultaat toegang tot

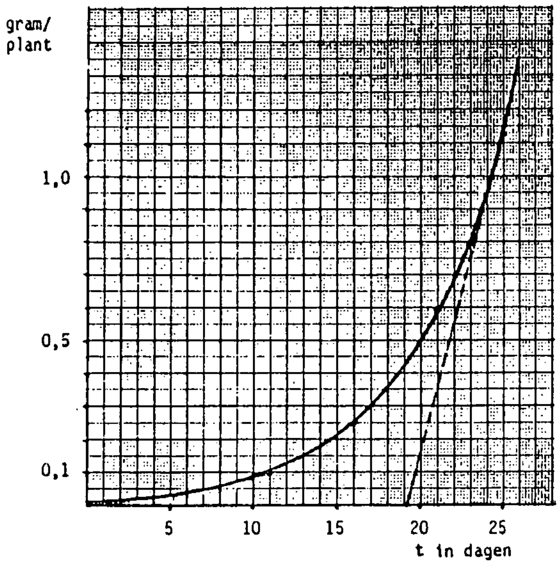
alle studierichtingen (mits de propaedeuse geheel is afgerond).
In het tweede trimester volgt dan voor vrijwel alle studenten een inleiding statistiek; bovendien worden er in het tweede en derde trimester nog speciale wiskundevakken gegeven ten behoeve van technisch georiënteerde of economische richtingen of moleculaire wetenschappen.

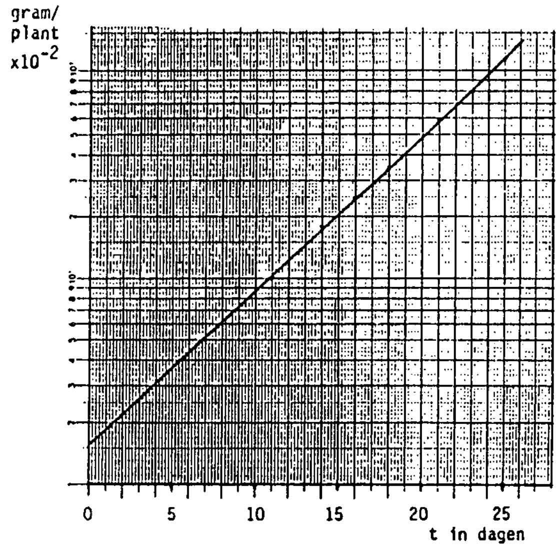
Het belang van goede voorbeelden

De wiskunde uit het eerste trimester is gericht op veelsoortige toepassingen in de verdere studie.

Zo opent het eerste hoofdstuk met meetkundige reeksen aan de hand van een model dat de lichtopname van een gewas beschrijft. Veronderstel dat de bladeren in lagen voorkomen die elk een gelijk percentage opvallend licht doorlaten. Na een zeker aantal lagen kan de hoeveelheid opgenomen en doorgelaten licht worden berekend en geverifieerd aan metingen, uitgevoerd bij de vakgroep theoretische teeltkunde.
Van diezelfde vakgroep komt in een ander hoofdstuk een model voor van de exponentiële groei van jonge komkommerplantjes, o.a. als illustratie van de begrippen relatieve en gemiddelde groeisnelheid en van het gebruik van enkellogpapier. (Zie figuur 1.)

Nadat zo'n voorbeeld is uitgewerkt, wordt de betreffende stof puur wiskundig behandeld en geoefend. Aan het eind volgen dan nog enkele voorbeelden uit andere vakgebieden, meestal in de vorm van opgaven.
Het verzamelen en uitwerken van zulke toepassingen is een tijdrovende zaak. We hebben echter gemerkt dat de belangstelling van de studenten voor toepassingen uit de praktijk zeer groot is, terwijl op zelfverzonnen voorbeelden lauw en verveeld wordt gereageerd. Ook de relatie tussen de wiskundigen en de medewerkers van de toeleverende vakgroepen wordt veel beter doordat het begrip voor elkaars werkterrein groeit.





Figuur 1

Groeicurves

Groeicurves zoals $y = a(1 - e^{-cx})$ en $y = \dfrac{ax}{x+d}$ komen in vrijwel alle vakgebieden voor. Een eenvoudig en actueel voorbeeld komt uit bodemkunde:

Ergens op een 50 meter dikke zandlaag ligt, op 1000 meter afstand van een waterscheiding, een vuilstortplaats. De horizontale waterverplaatsing in de bodem wordt gegeven door

$x(t) = 1000\left(e^{\frac{Nt}{50\varepsilon}} - 1\right)$ en de verticale door

$d(t) = \dfrac{50x(t)}{x(t) + 1000}$ (t in jaren).

Met het jaarlijks neerslagoverschot $N = 0{,}2$ m/jaar en het met water gevulde deel van het porievolume $\varepsilon = 0{,}4$ kan o.a. de baan van het uitgespoelde vuil worden getekend. Ook kan het voorstellen van $\dfrac{1}{d}$ tegen $\dfrac{1}{x}$ als een rechte lijn worden geïllustreerd (werken met omgekeerde schalen).

De studenten worden eerst vertrouwd gemaakt met dergelijke krommen. Enige weken later komen deze krommen terug, uitgaande van hun differentiaalvergelijking.

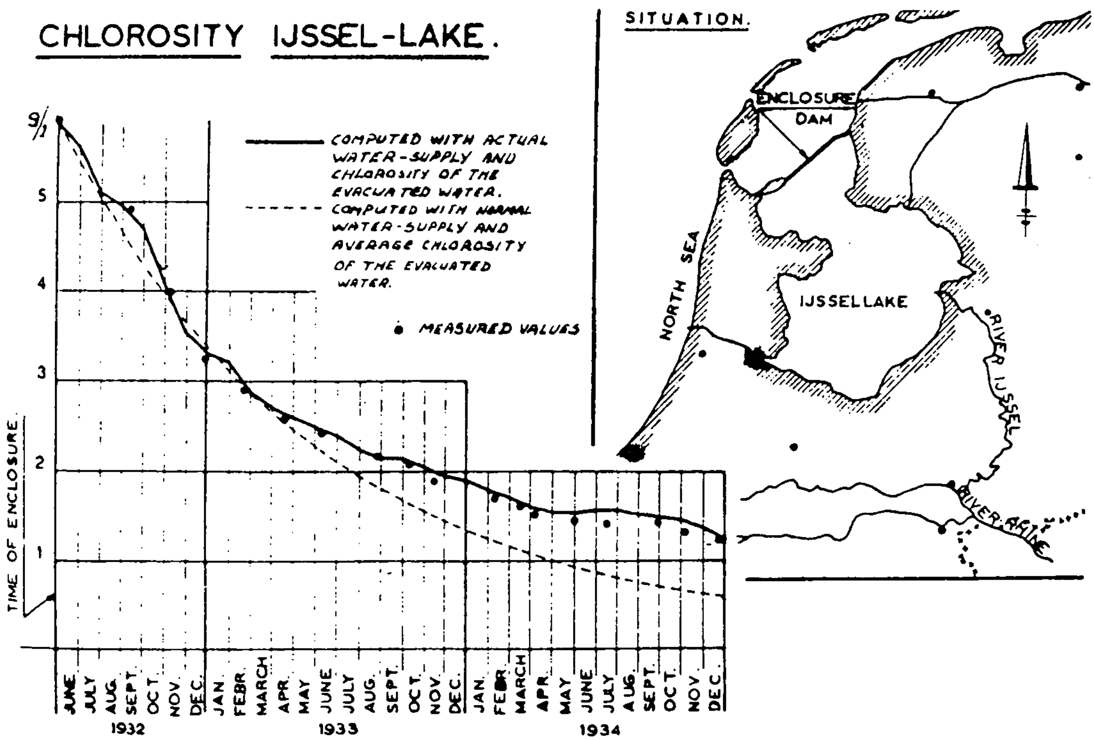
In een voorbeeld van cultuurtechniek, dat gaat over de ontzilting van de voormalige Zuiderzee na aanleg van de afsluitdijk, komt zo heel fraai een kromme van een der zojuist genoemde typen voor. In 1932, na voltooiing van de dijk, daalde het zoutgehalte van het water geleidelijk. Het model was nu als volgt:

Het IJsselmeer bevat V m³ water met van de tijd t afhankelijk zoutgehalte $c(t)$. Jaarlijks stroomt er via de IJssel A m³ water met constant zoutgehalte a in en via de sluizen in de afsluitdijk stroomt er evenveel water met een concentratie $c(t)$ uit. Er wordt verondersteld dat het water volkomen gemengd is, en dat de overige effecten zoals regenval en verdamping elkaar opheffen.

De differentiaalvergelijking wordt dan

$$\frac{dc}{dt} = \frac{A}{V}(a - c(t)).$$

Met $A = 13 \cdot 10^9$ m³/jaar en $V = 13 \cdot 10^9$ m³ en $a = 0{,}1$ kg/m³ en $c(0) = 5{,}9$ kg/m³ bleek de zo gevonden kromme in het eerste jaar de meetpunten fraai te volgen; de afwijking in het tweede jaar was te wijten aan de uitzonderlijk warme en droge



Figuur 2

zomer waardoor de verdamping de regenval verre overtrof. (Zie figuur 2.)

Algemener dan de voorgaande typen komt een logistische kromme in de toepassingen voor (sigmoïde), met differentiaalvergelijking

$$y' = ky(a - y).$$

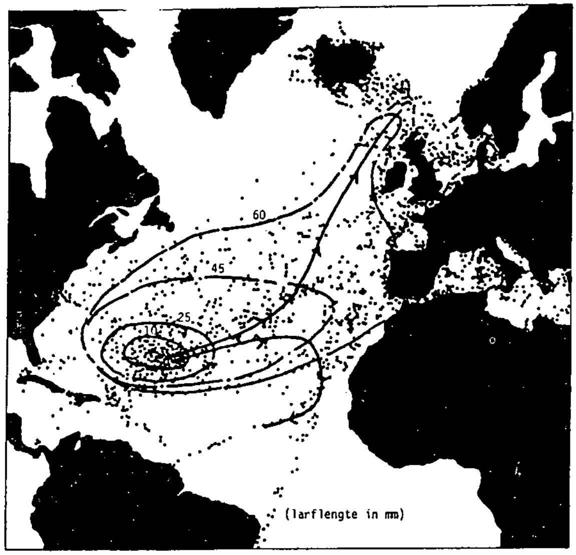
Zowel de groei van een vrijstaande plant als van een populatie valt hieronder, maar eveneens de verkoopcijfers van een nieuw produkt of het verloop van een ziekte in een veeschuur.

Andere onderwerpen

Wat de analyse betreft komen in het eerste propaedeuse-trimester nog voor:
- numerieke methoden
- functies van twee variabelen
- uitbreiding van de kennis van het integreren.

De numerieke methoden zoals regel van Simpson voor oppervlakte, en Taylorreeksen worden behandeld op geschikte plaatsen tussen de andere stof, b.v. bij integreren. Nulpuntsbepaling volgens Newton vindt o.a. een toepassing bij het berekenen van eigenwaarden van een matrix.
'Functies van twee variabelen' is als inleiding bedoeld voor de meer technische richtingen en economie; er wordt in vervolgvakken uitgebreider op ingegaan.
Er worden enige eigenschappen behandeld zoals partieel differentiëren, stationaire punten en vrije extremen, orthogonale trajectoriën en gebiedsintegralen. Eenvoudige toepassingen zijn hier niet zo veel voorhanden; wat de orthogonale trajectoriën betreft kom je al gauw op stroom- en potentiaallijnen terecht, die in een vervolgvak met complexe functies worden behandeld.

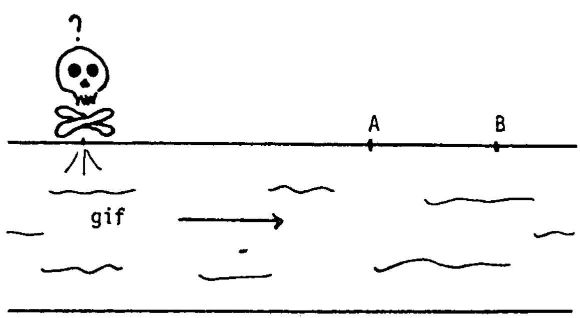
Een aardig inleidend voorbeeld komt echter uit de visserij:
Om de broedgebieden van de paling te vinden zijn jaren achtereen in de Atlantische Oceaan op veel plaatsen watermonsters genomen die palinglarven bevatten. Van die larven werd de lengte gemeten, vindplaatsen van larven met gelijke lengte werden door lijnen verbonden. Lijnen met afnemende larflengte omsloten een steeds kleiner gebied, de Sargassozee. De orthogonale trajectoriën geven de loop van grote zeestromen aan, zoals de Golfstroom. (Figuur 3.)



Figuur 3

Een voorbeeld uit de proceskunde

Uit de proceskunde stamt een methode om in eerste benadering de bron op te sporen van een illegale vuilstort in de Rijn:

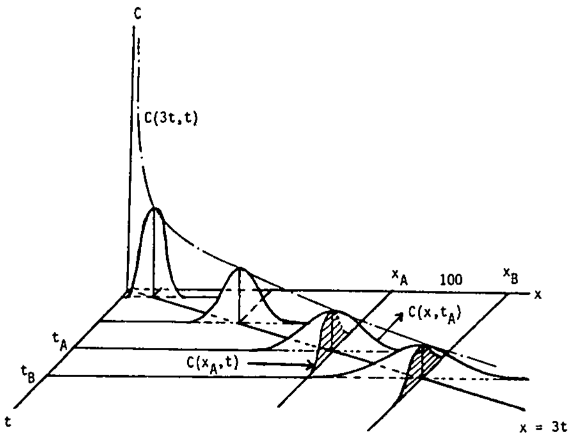


Figuur 4a

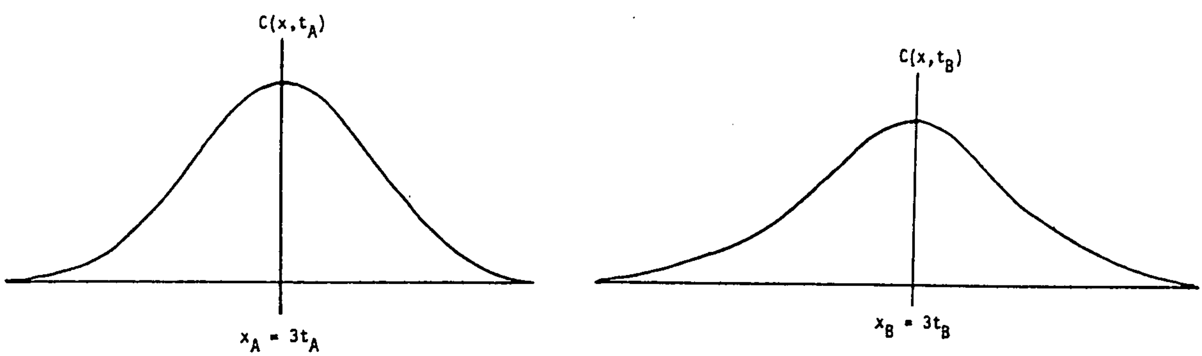
Op bepaalde afstanden van elkaar zijn langs die rivier meetstations gelegen waar het langskomend water wordt onderzocht. (Figuur 4a.)
Is op $x = 0$ en $t = 0$ een hoeveelheid gif, G, geloosd, dan wordt de concentratie op een verdere plaats x en een tijd t gegeven door

$$C(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} e^{\frac{-(x-3t)^2}{4Dt}} \frac{G}{S}.$$

D = constant, S = gemiddelde doorsnede van het rivierbed, stroomsnelheid = 3 km/u. Nu meet men in station A, plaats x_A, de langskomende golf gif. Hiervan komt de *maximale concentratie* langs op t_A. Enige tijd later passeert de top van de nu meer afgevlakte golf station B, op x_B en t_B. (Zie de figuren 4b en 4c.)



Figuur 4b



Figuur 4c

Stel dat voor de gemeten tophoogten van de concentraties geldt: $C_A = 1{,}2C_B$.
De maximale concentratie wordt verondersteld te zijn bereikt als $\frac{(x-3t)^2}{4Dt} = 0$, waaruit eenvoudig volgt dat $t_B = 1{,}44t_A$. De afstand tussen de meetstations is bekend, zeg 100 km.
Eliminatie van de andere variabelen levert nu $x_A = 3t_A = \frac{100}{0{,}44} = 227$ km. De lozing vond dan plaats op 227 km voor station A.

Hierbij is gebruik gemaakt van partieel differentiëren naar x in plaats van naar t, hetgeen correct maar wel bewerkelijker zou zijn. Het verschil in resultaat is verwaarloosbaar tegen de andere vereenvoudigingen in het model, b.v. een overal constante stroomsnelheid, geen zijrivieren etc. Het model schijnt een goede eerste benadering van de plaats van lozing te geven.

Matrices

Naast analyse bevat de wiskunde-stof in het eerste propaedeuse-trimester nog matrices en vectoren; van dit laatste speciaal projecties, hoeken en afstanden en orthogonaliseren van een basis. Dit onderdeel wordt gebruikt in een vervolgvak statistiek.
In 'landbouwwetenschap' spelen Lesliematrices een rol van betekenis. In de veefokkerij komt bij-

voorbeeld zo'n matrix voor bij het opzetten van een nieuw bedrijf, beginnend met 90 stuks vrouwelijk jongvee. De Lesliematrix van dit vee is bekend:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

In ons voorbeeld hebben we 0,7 vervangen door $\frac{22}{27}$, waardoor de positieve eigenwaarde één wordt en de bijbehorende stabiele leeftijdsverdeling eenvoudig is te vinden.
Enige tijd later wordt dan alsnog de originele 0,7 ingevoerd; dan is de opgave om numeriek de juiste eigenwaarde (0,97) te vinden.

Tenslotte een nog steeds actuele opgave uit de toxicologie:
Omstreeks 1966 gingen kolonies eidereenden en grote sterns in de Waddenzee dramatisch snel achteruit, naar bleek door gifstoffen uit het Botlekgebied die met zeestromen mee de Waddenzee bereikten. Juist naar aanleiding van onderzoek naar deze vogelsterfte sloot het bedrijf dat de veroorzakende gifstoffen aldrin en telodrin maakte en werd pas heropend na het aanbrengen van reinigingsinstallaties. De kolonies herstelden zich toen geleidelijk.
De bedoelde stoffen hopen zich in het lichaamsvet van de dieren op. In perioden waarin de vetreserves fors worden aangesproken komt het gif dan plotseling vrij. Dat zijn:
– de geboorte, het uit het ei kruipen is inspannend en bovendien neemt het diertje dan de dooierrest met sterk geconcentreerd gif op;
– het vliegvlug worden, de jonge vogels zoeken onervaren voedsel en moeten veel inspanning leveren.
In deze twee perioden vallen de meeste slachtoffers.
Ons voorbeeld is nu als volgt:
De Lesliematrix van de ongestoorde populatie, één waarin het effect van minder levend geboren jongen is verwerkt, en één waarin een grote sterfte van vliegvlugge jonge vogels optreedt zijn resp.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Deze matrices met eenvoudige positieve eigenwaarden beschrijven heel redelijk de waargenomen achteruitgang; combinatie van de twee effecten geeft zelfs treffend de waargenomen daling weer.

Slot

Dit type propaedeuse-wiskunde werkt nu met enige wijzigingen ongeveer acht jaar. De reacties van studenten en van stafleden van andere vakgroepen zijn positief. Het blijkt voldoende te zijn enkele goed uitgewerkte toepassingen per onderwerp aan te bieden; het oefenmateriaal is dan meer 'bedacht'.
Wel is het nodig gebleken de wiskundige stof, los van de toepassingen, helder en duidelijk te behandelen. Een voordeel is ook dat de student al doende leert een zich voordoend probleem te vertalen in wiskundige formules, en omgekeerd de resultaten uit die formules weer terug te vertalen in termen van de oplossing van het gegeven probleem.
De keuze van de stof was soms vrij moeilijk. Dit is het enige stadium van de studie waarin *alle* studenten dezelfde stof te verwerken krijgen, waarbij het onvermijdelijk voor sommigen wat weinig en voor anderen wat veel is. Door specifieke vervolgvakken aan te bieden wordt het 'te weinig' zo goed mogelijk gecompenseerd.
Het voornaamste doel van de propaedeuse-wiskunde: animo van 'de student' om wiskunde te gebruiken, te vergroten en daarvoor relevante kennis aan te bieden, lijkt redelijk te worden bereikt.

● **Bijdrage** ● ● ● ●

▶ Het examen lbo/mavo C/D 1990, experimenteel (4)

Truus Dekker

'Wordt er eigenlijk volgens het nieuwe examenprogramma nog wel iets aan algebra gedaan', is een vraag die regelmatig gesteld wordt. Natuurlijk wel, al was het alleen maar vanwege het feit dat het D-programma aansluiting moet geven bij de wiskunde van de havo. Daarom deze keer op de Werkbladen een aantal algebra-opgaven, zowel uit het experimentele C- als het D-examen. Waarbij u wel moet bedenken dat deze examens nog volgens het 'oude' examenprogramma werden afgenomen. De opgaven zien er vaak niet anders uit dan u gewend bent, leerlingen moeten nog steeds vergelijkingen kunnen oplossen. Maar de manier waarop ze hun antwoord mogen geven is wel anders. Bekijk b.v. eens de uitwerking van Roland op vraag 7: (de tekst van Roland is cursief gedrukt)

Gevonden in opg. 5:
$f: x \to -x^2 + 6x - 7$
$\quad -(x-3)^2 + 2$
Dat toegepast in opg. 7:

-3	drie afhalen van x
kw	kwadraat nemen
t	tegengesteld
$+2$	twee erbij
↓ *50*	de uitkomst

Dan gaat hij terugrekenen vanaf de uitkomst:
$(t)52\sqrt{\ } + 3 = 10,2$
Ja, dus. De waarde −50 wordt inderdaad bereikt.

Ronald geeft met zijn manier van werken duidelijk aan dat hij begrijpt hoe een 2e graadsvergelijking is opgebouwd. Dat begrip zou je alle leerlingen toewensen; wat niet wegneemt dat ook een 'traditionele' oplossingsmethode hier uiteraard goed is. Voor de meeste leerlingen betekent het oplossen van een 2e graadsvergelijking echter het uitvoeren van een slecht begrepen 'kunstje'. Zo gaf Geert als antwoord op vraag 23 (C-niveau):
$x^2 + 7x = 18$
$x(x + 7)^2 = 18$
$x = 0$ *of* $x + 7 = 18$
Opgave 23 uit het D-examen, een stelsel vergelijkingen, mag volgens het correctievoorschrift zowel grafisch als via een berekening worden opgelost. Een grafische oplossing ben ik niet tegengekomen, zelfs niet als controle. Dat is jammer, want bij de berekening ging nogal eens iets mis.
De opgaven 21 en 22, C-niveau, vormen een voorbeeld van een vergelijking met twee onbekenden. Er had ook kunnen staan:
$3x + 2y = 5$
Als $x = 1,2$ bereken dan de waarde van y.
Vooral voor leerlingen die C-niveau dóen is het echter belangrijk dat de opgaven ergens over gáán. De opgaven 21 en 22 gaven in het algemeen ook geen problemen.
De opgaven 8 t/m 10 van het tweede tijdvak D-niveau zijn door te weinig leerlingen gemaakt om er veel over te kunnen zeggen. Bij opgave 10 werd door twee leerlingen genoteerd:
Er staat drie keer −3x −15, dus het antwoord blijft steeds gelijk.

Het onderwerp 'algebra' is tot nu toe weinig in de publiciteit geweest. Dat komt vooral omdat de algebragroep het ontwikkelwerk vanaf het niveau van de brugklas is gestart.
Vooral voor de C-leerlingen blijkt het oplossen van 2e graads vergelijkingen nog steeds een lastig probleem te zijn. Maar ook aan opgaven volgens het 'oude' programma valt veel te beleven, gezien de uitwerking van leerlingen zoals Roland.

● Werkblad ●

▶ Algebra (1)

C-niveau

De opgaven 21 en 22 horen bij elkaar

21 Drie kuikens en twee muizen kosten samen *f* 5,–.
Als één kuiken *f* 1,20 kost, wat kost dan één muis?

Een winkelier heeft méér kuikens dan muizen. Hij maakt daarom de kuikens *voordeliger* dan de muizen. Hij wil wel dat drie kuikens en twee muizen samen *f* 5,– blijven kosten.

22 Geef een voorbeeld van de prijs die hij dan voor een kuiken en een muis kan vragen.

23 Los de volgende vergelijking op:
$x^2 + 7x = 18$.

24 Bereken welk getal voor x genomen moet worden zodat wat hieronder staat waar is.
$3(2x - 5) = 19 + 2x$.

D-niveau

23 Los het volgende stelsel vergelijkingen op:

$$\begin{cases} 3x + 7y = 13 \\ 5y = -4x \end{cases}$$

Uit: experimenteel examen lbo/mavo C/D 1990

• Werkblad •

▶ Algebra (2)

D-niveau, 1e tijdvak

De opgaven 5 t/m 7 horen bij elkaar.
Ze gaan over de functie:
$f: x \rightarrow -x^2 + 6x - 7$.

5 Teken de grafiek van deze functie. Laat in het kort zien welke berekeningen je maakte.

6 Kan de functie de waarde 6 bereiken?
Ja, want . . . of nee, want . . .

7 Kan deze functie de uitkomst -50 krijgen?

D-niveau, 2e tijdvak

De opgaven 8 t/m 10 horen bij elkaar.

8 Voor welke x geldt: $\dfrac{-3x - 15}{2} < 0$?

9 En voor welke x geldt: $\dfrac{-3x - 15}{100} < 0$?

10 De opgave: 'Voor welke x geldt: $\dfrac{-3x - 15}{2671} < 0$' hoef je niet apart op te lossen.
Het antwoord is namelijk hetzelfde als dat van de opgaven 8 en 9. Verklaar dit.

Uit: experimenteel examen lbo/mavo C/D 1990

● Bijdrage ● ● ● ●

▶ Probleem oplossen en het Wiskunde-onderwijs

W. P. van den Brink

1 Inleiding

Doelgericht en efficiënt leren denken behoort een hoofddoelstelling in het onderwijs te zijn. En dat wordt steeds belangrijker naarmate ons kennisbestand groeit en de wereld complexer wordt. Je kunt je beter methoden van kennisverwerving eigen maken dan proberen grote hoeveelheden kennis op te slaan.

Leren in ons onderwijs heeft vooral betrekking op twee kennisaspecten. Het eerste aspect betreft het verwerven van kennis van begrippen, feiten, regels, wetmatigheden en verbanden daartussen. Dergelijke kennis wordt declaratief genoemd. Het tweede aspect bestaat uit kennis van stapsgewijze procedures, zogenaamde algoritmen, voor het op mechanische wijze oplossen van problemen uit een goed afgebakende klasse van problemen. Deze laatste vorm van kennis wordt procedurele kennis genoemd. Het vervelende is dat een algoritme weliswaar een oplossing garandeert voor problemen uit de klasse waarop het van toepassing is, maar dat je er geen nieuwe problemen mee kunt oplossen.
Leren gebaseerd op het verwerven van declaratieve en procedurele kennis is dus vooral gericht op reproduktie en imitatie. Naast kennis van feiten en procedures zijn andere vormen van kennis noodzakelijk om nieuwe problemen op te kunnen lossen.

Het vervelende is dat een algoritme weliswaar een oplossing garandeert voor problemen uit de klasse waarop het van toepassing is, maar dat je er geen nieuwe problemen mee kunt oplossen.

Het onderwijs zou aan deze laatste vormen van kennis meer aandacht dienen te besteden. Het moet daartoe gericht worden op het zien van verbanden, algemene regels en structuren, op reflectie over het oplosproces, kortom op het ontwikkelen van inzicht en begrip. Wie kan denken hoeft zich niet langer tot imiteren te beperken maar kan ook op creatieve wijze nieuwe problemen oplossen, iets wat in het dagelijks leven maar al te vaak noodzakelijk is.

Het is natuurlijk de vraag of je kunt leren denken in algemene zin. Meestal worden er bij trainingsprogramma's voor cognitieve strategieën, die geëvalueerd worden met een onderzoeksopzet voorzien van een voor- en natest, wel positieve effecten van de training gevonden. Een belangrijke vraag is natuurlijk of de toepassing van de geleerde strategieën niet beperkt blijft tot de natest van het onderzoek. De aangeleerde strategieën zouden blijvend tot het handelingsrepertoire van de proefpersonen moeten gaan behoren. Ook is het van belang na te gaan of er transfer van het aangeleerde optreedt naar andere dan de met de training bestreken gebieden. Leidt training in bijvoorbeeld wiskundig denken en probleem oplossen wel tot beter redeneren bij andere mentale taken? De geleerde vaardigheden zouden een integraal deel uit moeten gaan maken van het gedrag van de proefpersonen wanneer zij studeren en problemen oplossen. Ondanks deze problemen spreekt er uit de recente literatuur over het trainen van cognitieve vaardigheden een voorzichtig soort optimisme (Cheng, Holyoak, Nisbett & Oliver, 1986; Feuerstein et al.,1986; Fong, Krantz & Nisbett, 1986; Lehman, Lempert & Nisbett, 1988; Nickerson, Perkins & Smith, 1985; Nisbett, Fong, Lehman & Cheng, 1987).

Het wiskunde-onderwijs lijkt zeer geschikt om een bijdrage te leveren aan het leren denken. Wanneer die doelstelling in het wiskunde-onderwijs voorop zou staan, zou het niet zo gek zijn er een verplicht eindexamenvak van te maken.
Wie wiskundige problemen oplost, kan niet zonder cognitieve strategieën, moet structuren doorzien en verbanden leggen. De vraag is of er in het huidige wiskunde-onderwijs in het vwo voldoende aandacht wordt besteed aan het onderwijzen van cognitieve strategieën. Ik vrees van niet, alhoewel er de laatste twintig jaar veel is verbeterd vooral door het werk van het IOWO en de Nederlandse Vereniging van Wiskunde leraren. Waardevolle inzichten met betrekking tot het oplossen van wiskundige problemen kunnen bijvoorbeeld ontleend worden aan de Wiskrant van het IOWO, Van Dormolen (1975, 1981), Van Dormolen en Zwaneveld (1979), Hiele (1973) en Zwaneveld en Van Dormolen (1977).

Het wiskunde-onderwijs lijkt zeer geschikt om een bijdrage te leveren aan het leren denken. Wanneer die doelstelling in het wiskunde-onderwijs voorop zou staan, zou het niet zo gek zijn er een verplicht eindexamenvak van te maken.

Maar de leerlingen krijgen op school nog steeds een enorme collectie trucs, recepten, standaardproblemen en standaardoplossingen te verwerken. Mechanisch werken wordt nog te vaak gestimuleerd. Op korte, proefwerk, termijn is dat wel doelmatig, maar denken leer je er niet van. Op langere termijn leidt het tot rigide oplosgedrag en veel fouten en frustraties.

Het wiskundig denken is vooral gebaseerd op het oplossen van problemen die een onafhankelijke, originele en creatieve aanpak vereisen en in veel mindere mate op het routinematig oplossen van standaardproblemen. Pas als het eerste aspect meer aandacht krijgt, kan onderwijs in de wiskunde ons denkvermogen in algemene zin ontwikkelen. Hoe zou dat kunnen gebeuren, wordt in de volgende paragraaf besproken.

2 Het oplossen van problemen in de wiskunde

Wie problemen oplost in de wiskunde moet wiskundige kennis kunnen toepassen in nieuwe probleem-situaties waarvoor geen standaardoplossingen voorhanden zijn. Een eerste vereiste daarvoor is dat de probleem-oplosser vertrouwd is met de twee componenten van het wiskundig denken: deductie en inductie. De deductieve redenering is van fundamenteel belang. Je moet logische conclusies kunnen trekken uit gegevens. Wiskundig probleem-oplossen is probleem-oplossen in een semantisch rijk domein.
Daarvoor is een uitgebreide kennisbasis van declaratieve en procedurele kennis noodzakelijk. Je moet de gebruikte symbolen, begrippen en stellingen begrijpen en met elkaar kunnen verbinden en je moet beschikken over een groot aantal algoritmen waarmee standaardproblemen opgelost kunnen worden. Het ontwikkelen van die kennisbasis krijgt in het wiskunde-onderwijs terecht ruime aandacht. Deductief kunnen redeneren en beschikken over een daaraan gekoppelde kennisbasis is een noodzakelijke voorwaarde om problemen op te kunnen lossen, maar het is niet voldoende. De probleem-oplosser moet ook inductief en analoog kunnen redeneren. Bij het analoog redeneren gaat het om het herkennen van de analogie tussen het probleem en een probleem waarvan de oplossing bekend is. Bij het inductief redeneren om kennis van en inzicht in oplossingsprocessen en dus om metacognitieve vaardigheden. Een wiskundig bewijs wordt op een logisch deductieve wijze gepresenteerd en wekt daardoor vaak de gedachte op: hoe is het mogelijk dat je zoiets bedenkt. Dat komt omdat de inductieve redenering, de informele wijze waarop het bewijs gevonden is, ontbreekt. Ieder bewijs en iedere oplossing van een probleem zou eigenlijk van informeel commentaar voorzien moeten worden waaruit blijkt hoe het bewijs of de oplossing gevonden is.
Zicht op de inductieve redeneringen maakt het mogelijk om wiskunde te begrijpen en inductief kunnen redeneren is noodzakelijk om wiskundige problemen op te kunnen lossen en de wiskunde als vak te kunnen ontwikkelen.
Het inductieve aspect van het wiskundig denken krijgt veel te weinig aandacht in het wiskunde-

onderwijs. Het ontdekken van regels, algemene principes en structuren en het maken van generalisaties komt nauwelijks aan de orde. Goede structureringen, herstructureringen en analyses van de problemen ontbreken veelal. Strategisch denken, een plan maken, dat gaat niet vanzelf, dat behoort onderwezen te worden. Over de betekenis van symbolen, uitdrukkingen en notaties wordt onvoldoende nagedacht. Symboolgebruik is een noodzakelijk kwaad in de wiskunde. In al zijn onvermijdelijkheid leidt het tot star en gefixeerd oplosgedrag. Door symbolen en formules voortdurend te verbaliseren en relativeren kan dit worden voorkomen en neemt de flexibiliteit van het oplosgedrag toe.
Een eerste vereiste om problemen op te kunnen lossen is kunnen denken. Maar daarnaast is ook inspiratie nodig. Invallen, plotselinge gedachten waarvan je niet precies weet waar ze vandaan komen, zijn bij veel problemen onmisbaar. De kennisbasis waarop die invallen gebaseerd zijn, zit in je hoofd. Het moet dus mogelijk zijn om die invallen voor te bereiden en uit te lokken. Het op de juiste wijze combineren van de kennis geeft de inval.

Zowel het inductief en analoog redeneren als het uitlokken van invallen hangt nauw samen met het gebruik van heuristieken. Heuristieken zijn de vuistregels van het probleem-oplossen. Het begrip heuristiek laat zich moeilijk definiëren. Het zijn inductieve en analoge redeneringen die je met redelijke zekerheid tot de goede oplossing van een probleem brengen. De Groot (1983) beschouwt intelligentie als een mentaal programma dat bestaat uit heuristieken. Een voortreffelijk algemeen overzicht van heuristische methoden kan gevonden worden in Groner, Groner & Bischof (1983).
Het wiskunde-onderwijs zou sterk heuristisch van aard moeten zijn. Je kunt niet zonder regels waarmee je problemen kunt proberen op te lossen. Wiskundigen gebruiken voortdurend heuristische procedures. Ze hebben ze tijdens hun studie moeizaam verworven. Want zo vanzelfsprekend als die heuristieken achteraf zijn, zo moeilijk zijn ze te ontdekken. Wat wiskundigen nog wel lukt, kan van schoolleerlingen niet verwacht worden. Daarom moeten de heuristieken expliciet onderwezen en vooral geoefend worden (Schoenfeld, 1985). Het alleen bestuderen van heuristieken is zinloos, je moet ze leren gebruiken.

Ieder bewijs en iedere oplossing van een probleem zou eigenlijk van informeel commentaar voorzien moeten worden waaruit blijkt hoe het bewijs of de oplossing gevonden is.

Natuurlijk is de heuristische aanpak niet voorbehouden aan de wiskunde. Ook andere vakken kunnen ervan profiteren. Bijvoorbeeld het talenonderwijs bij het begrijpen en produceren van teksten (Andriessen en Boonman, 1988). Maar voor het wiskunde-onderwijs zijn de heuristieken vrij expliciet en volledig geformuleerd. Daardoor is toepassing in het wiskunde-onderwijs eenvoudiger. De wiskundige Bolzano (1930) heeft al een aantal heuristieken van tamelijk algemene en meer wiskundige aard gegeven. Ook Duncker (1935) benadrukt dat voor het denkproces heuristische methoden noodzakelijk zijn en heeft een aantal algemene heuristische zoekmethoden opgesteld. Door dit werk geïnspireerd heeft de wiskundige Polya in 1945 in 'How to solve it' een collectie heuristieken geformuleerd met de bedoeling het oplossen van wiskundige problemen te systematiseren en vereenvoudigen (Polya, 1957).

Polya verdeelt het probleem-oplossen in vier fasen:
1 Probeer het probleem te begrijpen en structureer het.
2 Ontwikkel een plan om het probleem op te lossen. Het gaat hierbij om een algemene strategie. Dit stadium is inductief van aard en dus bij uitstek geschikt voor het gebruik van heuristieken.
3 Voer het plan uit, geef een bewijs. Dit is de deductieve fase.
4 Controleer de oplossing. Reflecteer over de oplossing en leer daarvan met het oog op toekomstige problemen.
Voor ieder van de vier fasen heeft Polya heuristieken geformuleerd. Zonder volledigheid na te streven, volgen er hier enkele ter illustratie:
Bij 1: wat zijn de gegevens; wat is er onbekend; wat

wordt er gevraagd; maak zo mogelijk een tekening: voer passende notaties in; herstructureer het probleem eventueel.
Bij 2: kun je een analoog probleem bedenken waarvan de oplossing bekend is; bekijk speciale gevallen van het probleem en probeer die te generaliseren; breek het probleem op in subproblemen die je wel kunt oplossen; bestaat er een relatie tussen de gegevens en de onbekende; beschik je over nuttige stellingen; heb je alle gegevens gebruikt; overweeg verschillende bewijsvormen zoals bewijs uit het ongerijmde, bewijs door volledige inductie, bewijs via tegenvoorbeeld, bewijs door terug te redeneren vanuit wat bewezen moet worden, enzovoorts.
Bij 3: Is iedere stap van het oplosproces correct uitgevoerd. (Dit deductieve stadium leent zich verder nauwelijks voor het formuleren van heuristieken.)
Bij 4: Controleer het resultaat en de argumenten; probeer het probleem op meerdere wijzen op te lossen; ga de juistheid na van de conclusies die aan de oplossing verbonden kunnen worden; is de gehanteerde methode en het resultaat elders bruikbaar.
Voor een meer volledige behandeling van de heuristieken wordt verwezen naar Polya (1957) of Nickerson et al. (1985). Veel van de Polya-heuristieken zijn ook toepasbaar op andere kennisgebieden. Newell en Simon (1972) hebben, geïnspireerd door Polya, heuristieken geformuleerd voor een breder probleemdomein dan de wiskunde. Wickelgren (1974) geeft hier een goede behandeling van. Ook Schoenfeld heeft in navolging van Polya een verzameling heuristieken opgesteld voor het oplossen van wiskundige problemen. Deze heuristieken kunnen gevonden worden in Schoenfeld (1980, 1985) of in Nickerson et al. (1985). Tenslotte verdient het begrip censuur van Minsky (1983) nog vermelding. Het onderdrukken van bij een leerling optredende ongewenste gedachten is een niet onbelangrijke heuristiek.
Het is natuurlijk de vraag of het expliciet onderwijzen van heuristieken betere probleemoplossers van de leerlingen maakt. Schoenfeld heeft in een aantal experimenten de effectiviteit van heuristisch wiskunde-onderwijs onderzocht. Hieruit blijkt dat heuristisch wiskunde-onderwijs effectief is mits de heuristieken zeer expliciet gemaakt worden en grondig bediscussieerd worden. Herhaling van de heuristieken is noodzakelijk en de leerlingen moeten aangespoord worden om ze te gebruiken. Kortom, het onderwijs moet doordrenkt zijn van het heuristiek gebruik. Pas dan gaan de heuristieken tot de geestelijke bagage van de leerlingen behoren. Ook Van Streun (1989) komt tot de conclusie dat heuristische methoden expliciet onderwezen moeten worden.

Dat betekent dat in het huidige curriculum flink geschrapt moet worden. De examendruk is nu al erg groot. Er is tijd nodig om de leerlingen te leren denken. Wanneer alles bij het oude blijft, leidt het verplicht stellen van wiskunde vooral tot nog meer gefrustreerde en ongemotiveerde leerlingen en tot een grotere bloei van de bijlesmarkt.

Negen op de tien havo- en vwo-leerlingen werken met de leergangen Getal en Ruimte, Moderne Wiskunde en Sigma. Deze leergangen kunnen geordend worden op de dimensie algoritmisch-heuristisch (Meijer et al., 1988). Moderne Wiskunde is de meest heuristische methode. Maar zelfs daarin krijgen de heuristische methoden niet veel aandacht. Dat komt omdat de leergangen slechts standaardproblemen en context-varianten daarvan behandelen. Er worden geen nieuwe problemen, waarvan de oplossing onbekend is, aan de leerlingen aangeboden. Daardoor bestaat er geen noodzaak om vertrouwd te raken met het inductief redeneren en heuristische methoden. Gevolg hiervan is dat je niet leert denken in het wiskunde-onderwijs. Het verplicht stellen van wiskunde als eindexamenvak zou samen moeten gaan met de invoering van een curriculum waarin een voorname plaats wordt ingeruimd voor het gebruiken van de kennisbasis bij nieuwe en uitdagende problemen. Dat betekent dat in het huidige curriculum flink geschrapt moet worden. De examendruk is nu al erg groot. Er is tijd nodig om de leerlingen te leren denken. Wanneer alles bij het oude blijft, leidt het verplicht stellen van wiskunde vooral tot nog meer gefrustreerde en ongemotiveerde leerlingen en tot een grotere bloei van de bijlesmarkt.

●

In de volgende paragrafen zullen bovenstaande standpunten nader toegelicht worden met voorbeelden. Eerst zullen enkele klassieke fouten uit de school-wiskunde besproken worden: hoe ze ontstaan door mechanische training in deductief denken en hoe ze voorkomen kunnen worden met een meer heuristische aanpak. Vervolgens zullen enkele problemen besproken worden waarbij een heuristische aanpak noodzaak is omdat recepten voor deze problemen in de school-wiskunde ontbreken. Tenslotte zullen enkele conclusies geformuleerd worden.

3 Foutenanalyse

Wiskunde-leraren kunnen onder elkaar smakelijke verhalen vertellen over de karakteristieke fouten die leerlingen maken bij het oplossen van vraagstukken. Die gesprekken monden gewoonlijk uit in de constatering dat de leerlingen tegenwoordig over veel te weinig technische vaardigheden beschikken. Deze conclusie wordt al enkele decennia getrokken. Het zou beter zijn om de hand in eigen boezem te steken en de vraag te stellen hoe het komt dat bepaalde fouten het eeuwige leven lijken te hebben. Er zijn tientallen van die karakteristieke fouten. In deze paragraaf worden er een paar geanalyseerd. Op grond van die analyse rijst het vermoeden dat het juist de leraren en leerboeken zijn die de fouten veroorzaken en in stand houden.

3.1 *Vereenvoudig* $a^2 \cdot a^3$ *en* $(a^2)^3$.

Scholieren leren de volgende algoritmen:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, bij het vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondgetal de exponenten optellen.

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, bij herhaald machtsverheffen de exponenten vermenigvuldigen.

Bij de invoering van deze regels wordt duidelijk gemaakt waarom ze gelden. Daarna worden ze op mechanische wijze zonder begrip toegepast. Na uitgebreide training gaat het op het proefwerk over machten wel goed. Maar als de leerlingen de regels later toe moeten passen zijn ze allang vergeten wanneer ze de exponenten moeten optellen en wanneer vermenigvuldigen. Eenvoudige opgaven zoals 'vereenvoudig $a^2 \cdot a^3$ en $(a^2)^3$' gaan dan mis. De antwoorden a^5 en a^6 worden op min of meer toevallige wijze aan deze opgaven toegevoegd. Hoe moet het dan? Het antwoord luidt: vermijdt zoveel mogelijk de procedurele aanpak. Geef niet de regels over het optellen en vermenigvuldigen van exponenten maar vraag steeds opnieuw: wat wordt er bedoeld met uitdrukkingen als a^2, a^3, en $(a^2)^3$, waar zijn het notaties voor? Pomp de betekenis erin en het kan niet meer mis gaan. Een macht is een notatie voor een herhaalde vermenigvuldiging.

Dus $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$ en $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2$.
Maar dan is $a^2 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$ en dat wordt genoteerd als a^5, dus $a^2 \cdot a^3 = a^5$. Evenzo is $(a^2)^3$ $= a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6$.
De fouten $a^2 \cdot a^3 = a^6$ en $(a^2)^3 = a^5$ zijn nu ondenkbaar. Door iedere keer weer naar het betekenisniveau af te dalen zullen de leerlingen de regels over het optellen en vermenigvuldigen van exponenten zelf wel ontdekken. Maar ze passen de regels dan niet toe omdat ze die uit hun hoofd geleerd hebben maar omdat ze de regels begrijpen en op ieder gewenst moment weer kunnen afleiden: $a^3 \cdot a^5$ zijn $3 + 5 = 8$ a's die met elkaar vermenigvuldigd worden, dus $a^3 \cdot a^5 = a^8$ en $(a^3)^5$ zijn $5 \times 3 = 15$ a's die met elkaar vermenigvuldigd worden, dus $(a^3)^5 = a^{15}$. De conceptuele kennis (wat is een macht) moet benadrukt worden. De procedurele kennis over het optellen en vermenigvuldigen van exponenten is volstrekte bijzaak, en komt in aanmerking om onder de censuur van Minsky te vallen.

3.2 *Vereenvoudig* $\frac{a^2 + a^3}{a}$ *en* $\frac{a^2 \cdot a^3}{a}$.

Ook deze opgave is een bron van fouten. De leerlingen weten na verloop van tijd niet meer of ze zowel a^2 als a^3 of alleen a^2 dan wel a^3 door a moeten delen. Meestal doen ze dan ook maar wat. Er bestaat een simpele strategie om na te gaan wat de juiste regel is. Neem een eenvoudig getallenvoorbeeld: Kies voor a de waarde 2.

$\frac{4+8}{2} = \frac{12}{2} = 6$, dus geldt kennelijk $\frac{4+8}{2} = \frac{4}{2} + \frac{8}{2}$

$= 2 + 4 = 6$ en niet $\frac{4}{2} + 8 = 10$ of $4 + \frac{8}{2} = 8$.

$\frac{4 \cdot 8}{2} = \frac{32}{2} = 16$, dus $\frac{4 \cdot 8}{2} = \frac{4}{2} \cdot 8 = 16$ of $\frac{4 \cdot 8}{2}$ $= 4 \cdot \frac{8}{2} = 16$ en niet $\frac{4 \cdot 8}{2} = \frac{4}{2} \cdot \frac{8}{2} = 8$.

Leerlingen maken zelden gebruik van deze heuristiek (neem een eenvoudig getallenvoorbeeld) die bij veel problemen werkt. Misschien is dat in dit geval maar beter ook want het begrip wordt er niet door vergroot. De vraag die gesteld zou moeten worden is: 'wat betekent $\frac{a^2 + a^3}{a}$?'. Het is een breuk en een breuk zoals $\frac{3}{4}$ is een notatie voor de herhaalde optelling $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4}$ wat weer genoteerd wordt als $\frac{3}{4}$. Dus $\frac{a^2 + a^3}{a} = (a^2 + a^3) \cdot \frac{1}{a}$. Op grond van de commutatieve of wissel-eigenschap $a \cdot b = b \cdot a$ is dit gelijk aan $\frac{1}{a} \cdot (a^2 + a^3)$. Volgens de distributieve of verdeel-eigenschap $a \cdot (b + c)$ $= a \cdot b + a \cdot c$, geldt dan $\frac{1}{a} \cdot (a^2 + a^3) =$ $\frac{1}{a} \cdot a^2 + \frac{1}{a} \cdot a^3 = a + a^2$. Op dezelfde wijze geldt:

$$\frac{a^2 \cdot a^3}{a} = \frac{1}{a} \cdot a^2 \cdot a^3 = \frac{a^2}{a} \cdot a^3 = a \cdot a^3 = a^4, \text{ of}$$

$$\frac{a^2 \cdot a^3}{a} = \frac{1}{a} \cdot a^2 \cdot a^3 = a^2 \cdot \frac{1}{a} \cdot a^3 = a^2 \cdot \frac{a^3}{a} = a^2 \cdot a^2 = a^4.$$

Ook hier geldt weer: leer geen mechanische procedurele regels aan maar los de opgaven begripsmatig op. Vraag je af wat er staat en welke regels toepasbaar zijn. Die houding moet aangekweekt worden door dergelijke redeneringen voortdurend te herhalen. De uitdrukking $\frac{a + b}{c}$ moet onmiddellijk vertaald kunnen worden in

$$\frac{1}{c} \cdot (a + b) = \frac{1}{c} \cdot a + \frac{1}{c} \cdot b = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

3.3 *Gegeven is de functie* $f(x) = 2x^2 + 1$. *Gevraagd* $f(x^2)$.

Veel leerlingen zitten bij deze opgave met de mond vol tanden of geven onjuiste antwoorden. Dat kan alleen maar wanneer ze niet begrijpen wat een functievoorschrift betekent. Het gegeven functievoorschrift zou door de leerlingen onmiddellijk als volgt geverbaliseerd moeten worden: je krijgt de functiewaarde die behoort bij een willekeurig getal door dat getal te kwadrateren, met 2 te vermenigvuldigen en er vervolgens 1 bij op te tellen. Leerlingen die functievoorschriften zo benaderen hebben geen moeite met deze opgave: de functiewaarde die behoort bij het getal x^2 wordt verkregen door x^2 te kwadrateren, met 2 te vermenigvuldigen en er 1 bij op te tellen. Dus $f(x^2) = 2(x^2)^2 + 1 = 2x^4 + 1$.

Het is de taak van de leraar om het functiebegrip te conceptualiseren door het voortdurend als een toevoegingsvoorschrift te verwoorden. Heel geschikt daarvoor is de zogenaamde pijlnotatie $f: x \rightarrow 2x^2 + 1$, te verbaliseren als: de functie f voegt aan een getal de functie waarde toe door het getal te kwadrateren, met 2 te vermenigvuldigen en er 1 bij op te tellen. Spreek liever over een getal dan over het getal x. Immers de keuze van de letter x voor het willekeurige getal is eveneens volstrekt willekeurig. De variabele x in het functievoorschrift in een zogenaamde dummy-variabele: of je nu schrijft $f(x) = 2x^2 + 1$ of $f(t) = 2t^2 + 1$ of $f(a) = 2a^2 + 1$, dat maakt niets uit, het gaat steeds om een en dezelfde functie. De dummy-variabele x kan bij het verbaliseren beter niet genoemd worden om fixatie te voorkomen. Ik zal nooit de vwo-leraar vergeten die bij mij een nascholingscursus toegepaste wiskunde volgde. Op het praktikum volgde uit een natuurkundig probleem de uitdrukking $a^2 + 2a + 1 = 0$. De leraar zat geruime tijd naar deze vergelijking te staren en kon hem niet oplossen. Ik merkte zijn blokkade op en vroeg hem: 'en als er nu eens $x^2 + 2x + 1 = 0$ had gestaan?' Hij kon de vergelijking onmiddellijk oplossen! Een fraaier en eenvoudiger voorbeeld van fixatie is toch nauwelijks denkbaar. De x dus maar niet noemen en duidelijk maken dat er in plaats van x net zo goed een ander symbool kan staan.

Een andere interessante fout met het functievoorschrift kwam ik eens tegen bij de volgende tweekeuzevraag:

Gegeven is de functie $f(x) = 2^x$. Voor deze functie geldt:
a $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
b $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$
Het antwoord moet b zijn: $f(x_1 + x_2) = 2^{x1+x2} = 2^{x1} \cdot 2^{x2} = f(x_1) \cdot f(x_2)$.
Toch kiest een aantal leerlingen voor a. Toen ik vroeg naar het waarom van deze keus was het antwoord: 'dat is toch de verdeel-eigenschap, $a(b + c) = ab + ac$, dus $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$'. De leerling zag $f(x_1 + x_2)$ als het vermenigvuldigen van f met de factor $(x_1 + x_2)$. Over mechanisch werken gesproken!
Er bestaan nog vele andere karakteristieke fouten. Maar waarschijnlijk is het beeld nu wel duidelijk. Het wiskunde-onderwijs bestaat vooral uit receptuur en mechanisch handelen wordt gestimuleerd. Natuurlijk vinden de leerlingen het vak moeilijk en vaak niet leuk. Doordat ze niet begrijpen wat ze doen, maken ze veel fouten. De bij wijze van voorbeeld behandelde fouten zijn ondenkbaar bij leerlingen die met begrip werken. Wiskunde-leraren zouden hier lering uit moeten trekken. Leg, naast de procedurele, veel meer nadruk op de heuristische en conceptuele kant van het vak.

4 Leren probleem oplossen

De in de vorige paragraaf behandelde voorbeelden maken slechts gebruik van eenvoudige onderbouwstof. De heuristische aanpak gaat niet veel verder dan het je voortdurend afvragen wat je aan het doen bent. Wat betekenen de gebruikte notaties en begrippen precies? Welke rekenregels staan er tot je beschikking? Naarmate de opgaven minder voorgekauwd en minder eenvoudig zijn, wordt de heuristische aanpak belangrijker. Zonder een goede probleemanalyse en een bijbehorend oplossingsplan kom je er dan echt niet meer uit. In deze paragraaf worden daar enkele voorbeelden van gegeven. Ze zijn gekozen om aan te geven in welke richting het onderwijs zou moeten gaan om de leerling werkelijk te leren denken.

4.1 *Bepaal de som van de natuurlijke getallen 1 tot en met n:*
$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n$.
Hoe moet je dat nu aanpakken? Een verstandig begin is het analyseren van een eenvoudig maar concreet getallenvoorbeeld. Neem bijvoorbeeld $S_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$. Nu kun je gewoon optellen en de som is 21. Maar dat helpt je niet bij het oplossen van het algemene geval. Het moet anders. Gevraagd wordt om een herhaalde optelling uit te voeren. Dat probleem is wel eens vaker voorgekomen en op elegante wijze opgelost. Bijvoorbeeld $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 5 \cdot 7 = 35$. Herformulering van een herhaalde optelling als een vermenigvuldiging geeft een sterke vereenvoudiging. Maar we kunnen deze observatie niet rechtstreeks toepassen omdat de getallen die je moet optellen van elkaar verschillen. Gelukkig valt er meer aan het voorbeeld te zien. Er zit een zekere symmetrie in het probleem. Van links naar rechts nemen de getallen steeds met 1 toe en dus van rechts naar links met 1 af. Maar dat betekent dat je ze twee aan twee kunt koppelen waarbij ieder tweetal dezelfde som heeft. De volgorde waarin je optelt is tenslotte vrij en het is dus verstandig om die volgorde handig te kiezen. Dus: $S_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = (1 + 6) + (2 + 5) + (3 + 4) = 7 + 7 + 7 = 3 \cdot 7 = 21$.
De herhaalde optelling is ook in dit geval teruggebracht tot een vermenigvuldiging. De structuur, die van belang is om het algemene geval te kunnen oplossen, ziet er als volgt uit. Het totale aantal op te tellen getallen is gelijk aan 6. Je kunt dus $\frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ paren vormen. De som van die paren is steeds gelijk aan $(1 + 6) = 7$. Dus $S_6 = \frac{1}{2} \cdot 6(1 + 6)$ of in woorden 'een half maal het aantal getallen vermenigvuldigd met de som van het eerste en het laatste getal'. Algemeen geldt dus: $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2} n(n + 1)$.

De oplettende leerlinge zal tegenwerpen dat de redenering slechts geldig is voor even waarden van *n*. Zij heeft gelijk en zal er ongetwijfeld geen moeite mee hebben om via een analyse van $S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ te ontdekken dat de for-

mule voor S_n ook geldig is voor oneven waarden van n.
Door een leerling met dit soort heuristische redeneerprocessen vertrouwd te maken leer je hem iets waarvan we mogen aannemen dat het op denken lijkt. Wat vind je daar nu van terug in leerboeken? De volgende elegante afleiding van de formule voor S_n:

$$\begin{array}{l} S_n = 1 \quad + 2 \quad + 3 \quad + 4 \quad + \ldots + n \\ \underline{S_n = n \quad + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 1} \; + \\ 2S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) \\ 2S_n = n(n+1) \\ S_n = \frac{1}{2}n(n+1) \end{array}$$

Prachtig, maar we worden er niets wijzer van. Het zijn bovenstaande gedachten die tot dit bewijs geleid hebben. Die zijn leerzaam maar ontbreken helaas in de leerboeken.

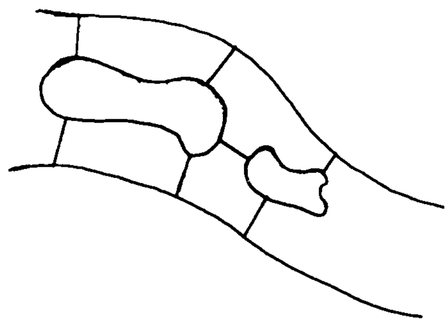
4.2 *Welk bedrag krijg je door f 40,– gedurende 20 jaar vast te zetten tegen 5% rente?*
Een leerling stelde mij deze vraag en suggereerde de volgende oplossing. 'Na 1 jaar is het tegoed gelijk aan *f* 40,– plus 5% rente daarover, dus $40 + 0{,}05 \cdot 40$. Na 2 jaar is het tegoed gelijk aan het bedrag na 1 jaar plus 5% rente daarover, dus $(40 + 0{,}05 \cdot 40) + 0{,}05 \cdot (40 + 0{,}05 \cdot 40)$. Na 3 jaar is het dan:
$[40 + 0{,}05 \cdot 40 + 0{,}05 \cdot (40 + 0{,}05 \cdot 40)] +$
$0{,}05[40 + 0{,}05 \cdot 40 + 0{,}05(40 + 0{,}05 \cdot 40)]$. En zo verder. Maar dat wordt veel te ingewikkeld. Ik kom er zo niet uit. Kan het niet handiger?'
Je krijgt er ieder jaar iets bij. De leerling koos daarom voor een additieve representatie van het probleem. Net als bij de vorige opgave krijg je dan een herhaalde optelling. En juist daarop loopt de oplossing vast. Het ligt dan ook voor de hand om weer te proberen om op een multiplicatieve representatie over te gaan. Die is hier bovendien niet moeilijk te vinden. In de algebra word je getraind in opgaven zoals $2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$. Gelijksoortige termen kun je optellen. Ik vroeg de leerling dan ook: 'waaraan is $x + 0{,}05 \cdot x$ gelijk?'. Hij antwoordde direct: '$1{,}05 \cdot x$'. 'Maar waaraan is $40 + 0{,}05 \cdot 40$ dan gelijk?' 'O ja, $1{,}05 \cdot 40$'. Na 1 jaar heb je dus $40 \cdot 1{,}05$, na 2 jaar $(40 \cdot 1{,}05) \cdot 1{,}05 = 40 \cdot (1{,}05)^2$ en na 20 jaar $40 \cdot (1{,}05)^{20}$. Volgens de zakrekenmachine is dat *f* 106,13. Een goed gekozen representatie en de oplossing van het probleem valt je in de schoot.
Ook hier is weer sprake van fixatie. De algebra traint je in het rekenen met symbolen. Het bevel 'vereenvoudig $x + 0{,}05 \cdot x$' leidt meestal wel tot het gewenste antwoord $1{,}05 \cdot x$. Maar bij een praktijkprobleem wordt $40 + 0{,}05 \cdot 40$ helaas niet herkend als een speciaal geval van $x + 0{,}05 \cdot x$ en dus ook niet vereenvoudigd. Dat komt omdat het onderwijs blijft steken in formalismen. Er wordt niet duidelijk gemaakt dat de regels in de praktijk gebruikt kunnen worden om problemen op te lossen door de representatie te vereenvoudigen.

4.3 *Bedenk een methode waarmee kwadraten zoals* $(25{,}5)^2$ *en* $(55)^2$ *uit het hoofd berekend kunnen worden.*
Dit lijkt een taak voor een rekenwonder. Maar rekenwonders worden niet geboren. Zij maken gebruik van slimme regels. Denk aan het voorbeeld uit paragraaf 3.1. Op grond van de daar behandelde regel kun je uit het hoofd zeggen
$1 + 2 + 3 + \ldots + 199 + 200 = 20100$. Rekenwonders beschikken over een groot inzicht in de regels van het rekenen. Op basis daarvan ontwikkelen ze slimme algoritmen. Gewoonlijk komt dat omdat ze beroepshalve veel gerekend hebben. Zo is het Nederlandse rekenwonder Willem Klein, alias Pascal, alias Willy Wortel medewerker van de rekenafdeling bij het Mathematisch Centrum geweest in het voorcomputer tijdperk. Hunter (1977) geeft een aardige analyse van het denken van het grootste rekenwonder aller tijden, de wiskundige Aitken. Ook Aitken moest het zonder computers stellen.
Hoe bereken je nu $(25{,}5)^2$ op een handige manier? Komt er in de schoolalgebra een formule voor waarmee je een kwadraat uit kunt rekenen? Het antwoord is, als fixatie dat tenminste niet verhindert, ja: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. De som van twee getallen kan met behulp van deze formule eenvoudig gekwadrateerd worden. Het getal 25,5 moet dus als een som geschreven worden. En dat kan probleemloos want 25,5 kan opgevat worden als een notatie voor $25 + 0{,}5$. Dus $(25{,}5)^2 =$
$(25 + 0{,}5)^2 = 625 + 2 \cdot 0{,}5 \cdot 25 + (0{,}5)^2 = 650{,}25$
en dat lukt best uit het hoofd. Evenzo is
$(55)^2 = (50 + 5)^2 = 2500 + 500 + 25 = 3025$. Het

vergt even denken – welke regels staan er tot mijn beschikking en hoe kan ik aansluitend daarbij het probleem anders representeren – maar dan is de oplossing ook eenvoudig en bevredigend.
Een opgave zoals bereken $(55)^2$ kan in sommige schoolboeken wel gevonden worden. Maar dan direct na de behandeling van de formule voor $(a + b)^2$, dus als contextvariant. De opgave zou veel waardevoller zijn als hij op een later tijdstip gegeven werd.

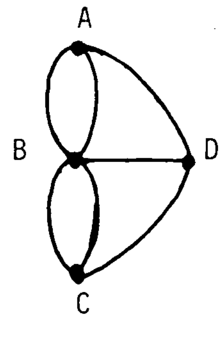
4.4 *Toon aan dat een getal deelbaar is door drie wanneer de som van de cijfers waaruit het getal bestaat deelbaar is door drie.*
Kies een speciaal geval, bijvoorbeeld een getal dat bestaat uit drie cijfers: abc. Noem de som van de cijfers waaruit het getal bestaat s: $a + b + c = s$. Nu is het essentieel dat je je realiseert wat abc in het tientallig stelsel betekent: $abc = 100a + 10b + c$. Maak vervolgens gebruik van het gegeven $a + b + c = s$. Er moet een uitspraak gedaan worden over de deelbaarheid abc door drie op grond van een eigenschap van s. Het ligt dus voor de hand om een zodanige substitutie uit te voeren dat s in abc voorkomt: $a + b + c = s$, $c = -a - b + s$. Invullen hiervan in abc geeft:
$abc = 100a + 10b - a - b + s = 99a + 9b + s$.
Deze drieterm is dan en slechts dan deelbaar door drie als alle drie de termen $99a$, $9b$ en s deelbaar zijn door drie. Omdat $99a$ en $9b$ deelbaar zijn door drie is abc dan en slechts dan deelbaar door drie als s deelbaar is door drie. Een zelfde redenering geldt voor getallen die bestaan uit meer of minder dan drie cijfers.
Om deze opgave op te kunnen lossen is begrip van het tientallig stelsel en deelbaarheid noodzakelijk. Ook moet je het gegeven op de juiste wijze gebruiken en tot eliminatie besluiten. De opgave is misschien niet eenvoudig maar zeker leerzaam. Bovendien is het toch wel aardig om een veel gebruikte regel ook te begrijpen.

4.5 *De bruggen van Köningsberg*
De stad Köningsberg (het huidige Kaliningrad) in Oost-Pruisen ligt op de oevers van de rivier de Pregel en op twee eilanden in de rivier. De stadsdelen zijn verbonden door zeven bruggen (zie figuur 1a). De bewoners van de stad vroegen zich af of het mogelijk was hun zondagse wandelroute zo te kiezen dat ze, thuis beginnend, iedere brug precies één keer zouden kunnen passeren om weer thuis uit te komen.



Figuur 1a

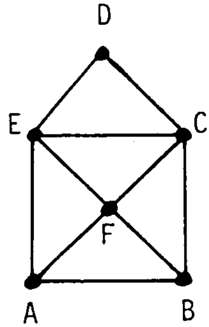
Wanneer een leerling dit probleem probeert op te lossen is de vaste strategie: trial and error. Dat is ook niet zo gek om mee te beginnen. Maar na een aantal tevergeefse pogingen wordt het verstandig om na te gaan denken over de aard en structuur van het probleem. Dat gebeurt helaas niet. Men blijft steken in de trial en error fase en lost het probleem niet op. En zo verschrikkelijk moeilijk is het probleem niet. De Zwitserse wiskundige Euler (1707-1783) loste het probleem al op. Hij gaf eerst een iets eenvoudiger representatie van het probleem (zie figuur 1b). A, B, C en D representeren de stadsdelen en de verbindingen daar tussen de bruggen.



Figuur 1b

Een representatie, die bestaat uit punten en verbindingen tussen die punten, wordt in de wiskunde een graf genoemd. Euler is de grondlegger van de grafentheorie. Laten we in punt A vertrekken. Is het nu mogelijk om precies één keer over alle bruggen te wandelen en in het uitgangspunt A terug te komen? Om een punt éénmaal te kunnen passeren heb je twee bruggen nodig. Over de éne brug kom je aan in het punt en over de andere brug vertrek je weer uit het punt. Wil je een zelfde punt tweemaal passeren over verschillende bruggen dan heb je vier bruggen nodig, enzovoorts. In ieder punt van de graf moet dus een even aantal bruggen uitkomen wil de wandeling realiseerbaar zijn. Dat geldt ook voor het vertrekpunt A want daar moet je ook weer uitkomen. Het aantal verbindingen dat in een punt uitkomt wordt de valentie van het punt genoemd. Alle punten in de graf hebben een oneven valentie en de wandeling is dus onmogelijk ongeacht het punt waar je met de wandeling begint. Dat is meteen de reden waarom de trial and error-methode niet werkt. Die methode is niet erg geschikt om aan te tonen dat iets niet kan. De voorgestelde wandeling is slechts mogelijk als alle punten in de graf een even valentie bezitten. Wie een stadswandeling uitzet of een museum ontwerpt, kan veel plezier van dit principe hebben.

Je kunt het probleem ook iets algemener formuleren. Is het mogelijk om in een graf een pad aan te geven dat alle verbindingen precies één keer doorloopt maar niet in het beginpunt hoeft terug te keren? Als dat pad bestaat wordt het een Eulerketen genoemd. Aan welke eisen moet een graf nu voldoen om een Eulerketen te bezitten? In het startpunt hoef je niet terug te komen. Het startpunt mag dus van oneven valentie zijn. Het zelfde geldt voor het eindpunt. Een graf bezit dus een Eulerketen als de graf hoogstens twee punten bevat met oneven valentie. Iedereen kent een voorbeeld van dit probleem: het bekende huisje uit figuur 2. Kun je dit huisje in één keer tekenen zonder je pen van het papier te nemen en zonder een lijnstuk meer dan eens te doorlopen? De oplossing is nu simpel. De punten C, D, E en F zijn van even valentie en leveren geen problemen op. De punten A en B hebben de valentie 3. Het probleem is dus oplosbaar mits je in A of in B start. Als je in A start zul je in B eindigen en als je in B start eindig je in A. Het is nu niet moeilijk om zelf soortgelijke opgaven te construeren.



Figuur 2

Proefpersonen komen bij het bruggenprobleem niet verder dan de trial and error-methode. Opvallend is dat men niet leert van de mislukkingen. Men redeneert niet: ik loop vast in dit punt omdat er een oneven aantal bruggen mee verbonden is. Nee, de proefpersonen stoppen en beginnen gewoon opnieuw. Een probleemanalyse blijft geheel uit. Ook hier blijkt het falen van het wiskunde-onderwijs. Je leert niet om jezelf vragen te stellen. Je leert niet om over problemen na te denken en om ze creatief op te lossen. Het is dus niet zo verrassend dat het eenvoudige bruggenprobleem te moeilijk is.
Aan bijvoorbeeld de grafentheorie (hoe kom je met zekerheid uit een doolhof) en de combinatoriek zijn tientallen problemen te ontlenen die slechts op heuristische wijze oplosbaar zijn. Het wiskunde onderwijs zou veel aandacht moeten besteden aan de analyse van dergelijke nieuwe problemen waarbij heuristisch denken noodzakelijk is om tot de oplossing te komen. Pas dan valt te verwachten dat dit onderwijs bijdraagt aan de ontwikkeling van ons denken.

5 Conclusie

Om wiskundige problemen op te kunnen lossen is een kennisbasis van declaratieve en procedurele kennis noodzakelijk. Het wiskunde-onderwijs verschaft de leerlingen die kennisbasis. Maar het op-

lossen van nieuwe problemen waarbij de kennisbasis pas na een transformatie kan worden toegepast, krijgt te weinig aandacht. Daarmee ontstaat het beeld van wiskunde-onderwijs dat vooral gericht is op procedureel onderhouds-denken. De leerling leert een collectie recepten en trucs in de vorm van algoritmen waarmee hij steeds terugkerende standaardproblemen kan oplossen. Veel verder dan kunnen imiteren van wat voorgedaan wordt komt de leerling op deze wijze niet. Dat leidt tot mechanisch werken, fouten door gebrek aan inzicht en begrip, snel vergeten van het geleerde en gebrek aan belangstelling omdat het onderwijs in deze vorm weinig motiverend is.

Hoe moet het dan? Naast procedureel onderhouds-denken zou ook het conceptueel vernieuwend-denken een belangrijke doelstelling in het onderwijs moeten zijn. Gebruik de competentie die in de vorm van een kennisbasis bij de leerlingen bestaat en laat ze er nieuwe problemen mee op lossen. In dat kader kunnen dan de inductieve en heuristische redeneringen onderwezen worden om een meer flexibele manier van denken te stimuleren. De oplossingen van problemen en bewijzen van stellingen moeten van uitgebreid heuristisch commentaar voorzien worden. Het is belangrijker om kennis van en inzicht in oplosprocessen bij te brengen dan louter kennis. Structureren, analyseren, verbanden leggen, structuren en algemene regels ontdekken, generalisaties maken, dat zijn wezenlijke vaardigheden om aan te leren. Grijp niet onmiddellijk naar recepten en trucjes maar reflecteer over het probleem en stel jezelf vragen.

De problemen moeten bij voorkeur aansluiten bij de belangstelling van de leerling en zijn nieuwsgierigheid naar de oplossing opwekken. Dat werkt motiverend. De beperking van het wiskunde-onderwijs tot vooral procedurele kennis wordt door de leerlingen als weinig inspirerend ervaren en correct gebruik van vaak onbegrepen algoritmen wordt met de tijd steeds moeilijker. Ik denk dan ook dat de leerlingen van het wiskunde-onderwijs veel minder opsteken dan mogelijk is. Wiskunde in de huidige vorm verplicht stellen als examenvak lijkt me dan ook vooral een modieus besluit. Wanneer aan de heuristische, inductieve en conceptuele kanten van de wiskunde intensieve aandacht besteed zou worden, ligt dat heel anders. Dan is het wiskunde-onderwijs zeer geschikt om te leren redeneren en probleem oplossen. Aangezien daarmee een belangrijke onderwijsdoelstelling wordt gediend, zou dan het verplicht stellen het overwegen waard zijn.

Literatuur

Andriessen, J. E. B. & J. H. Boonman, Probleemoplossen en het begrijpen en produceren van teksten. *Pedagogische Studiën,* 1988, *65,* 32-44.

Bolzano, B,. *Wissenschaftslehre* (vol. III). Leipzig: Meiner, 1930.

Cheng, P. W., K. J. Holyoak, R. E. Nisbett & L. M. Oliver, Pragmatic versus syntactic approaches to training deductive reasoning. *Cognitive Psychology,* 1986, *18,* 293-328.

Dormolen, J. van, *Vaardigheden, 1001 redenen waarom leerlingen geen (goede) routine hebben,* Utrecht: OW & OC, 1975.

Dormolen, J. van, *Didactiek van de wiskunde.* Utrecht: Bohn, Scheltema en Holkema, 1981.

Dormolen, J. van & B. Zwaneveld, *Instappen en toepassen.* Utrecht: OW & OC, 1979.

Duncker, K., *Zur Psychologie des produktiven Denkes,* Berlin: Springer, 1935.

Feuerstein, R., M. B. Hoffman, Y. Rand, M. R. Jensen, D. Tzuriel, & D. B. Hoffman, Learning to learn. In M.Schwebel & C. A. Mahler (Eds.) *Facilitating cognitive development: international perspectives, programs and practices.* New York: Haworth Press, 1986.

Fong, G. T., D. H. Krantz & R. E. Nisbett, The effects of statistical training on thinking about everyday problems. *Cognitive Psychology,* 1986, *18,* 253-292.

Groner, R., M. Groner & W. F. Bischof (Eds.), *Methods of heuristics.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1983.

Groot, A. D., Heuristics, mental programs, and intelligence. In: R. Groner, M. Groner & W. F. Bischof (Eds.), *Methods of heuristics.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1983.

Hiele, P. M. van, *Begrip en inzicht.* Purmerend: Muusses, 1973.

Hunter, I. M. L., Mental calculation. In: P. N. Johnson-Laird & P. C. Wason (Eds.). *Thinking: Readings in Cognitive Science.* Cambridge: Cambridge University Press, 1977.

Lehman, D. R., R. O. Lempert & R. E. Nisbett, The effects of graduate training on reasoning. *American Psychologist,* 1988, *43,* 431-442.

Meijer, J., J. Chr. Perrenet & F. Riemersma, Leren probleemoplossen in het wiskunde-onderwijs. *Pedagogische Studiën.* 1988, *65,* 16-31.

Minsky, M., Jokes and the logic of the cognitive unconscious. In: R. Groner, M. Groner & W. F. Bischof (Eds.), *Methods of heuristics.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1983.

Newell, A. & H. A. Simon, *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1972.
Nickerson, R. S., D. N. Perkins & E. E. Smith, *The teaching of thinking*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1985.
Nisbett, R. E., G. T. Fong, D. R. Lehman & P. W. Cheng, Teaching reasoning. *Science*, 1987, *238*, 625-631.
Polya, G., *How to solve it* (2nd ed.). New York: Doubleday, 1957.
Streun, A. van, *Heuristisch Wiskunde Onderwijs: verslag van een onderwijsexperiment*. Proefschrift, Universiteit van Groningen, 1989.
Schoenfeld, A. H., Teaching problem-solving skills. *American Mathematical Monthly*, 1980, *87*, 794-805.
Schoenfeld, A. H., *Mathematical problem solving*. Orlando, Florida: Academic Press, 1985.
Wickelgren, W. A., *How to solve problems*. San Francisco: Freeman, 1974.
Zwaneveld, B. & J. van Dormolen, *Handelen om te begrijpen*. Utrecht: OW & OC, 1977.

Boekbespreking

Friedhelm Padberg: *Didaktik der Bruchrechnung*, Band 11 van de serie Lehrbücher und Monographien der Mathematik, B. I. Mannheim, Wien, Zürich, ISBN 3-411-03207-3, 217 blz.; DM 34,–.

Leerlingen en leraren ontmoeten beiden de grootste moeilijkheden bij het leren resp. onderwijzen van het rekenen met breuken. In dit boek, dat een bewerking en uitbreiding is van een eerder door hem geschreven 'Didaktik der Bruchrechnung' behandelt Padberg uitvoerig de wiskunde van het rekenen met breuken, de verschillende manieren waarop bewerkingen worden ingevoerd met daarbij voor- en nadelen van deze manieren; aard, oorzaak en veelvuldigheid van leerlingenfouten met strategieën om het aantal fouten te verminderen. Padberg refereert hierbij aan eigen en aan Anglo-Amerikaans onderzoek. Nederland is in dit boek vertegenwoordigd door citaten van Freudenthal en Streefland, waarbij de pizzaverdeelaanpak van Streefland de enige contextuele realistische vermelding is.
Aanbevolen voor opleiders, leerplanontwikkelaars en bibliotheken van opleidingsinstituten.
Gortdroog.

J. J. Sloff

● 40 jaar geleden ● ●

▶ Vraagstukken

637. a. Los op: $x - 2 + {}^3\log(3^x - 2) = {}^9\log 49$.
b. Bewijs, dat er geen enkele waarde van p bestaat, waarvoor de vergelijking:
$x^2 - (10 + 2p)x + 2p^2 + 10p = 0$
twee negatieve wortels heeft.
c. Gegeven is het stelsel vergelijkingen:
$(m - 2)x + (2m + 1)y = 1$
$(m + 1)x - (m + 5)y = -2$.
Druk de onbekenden x en y uit in m. Voor welke waarde(n) van m bezit dit stelsel geen oplossing? Voor welke waarde(n) van m bezit dit stelsel meer dan één oplossing?

643. T is de top van een pyramide, die de rechthoek ABCD tot grondvlak heeft. De projectie van T op het grondvlak valt samen met het midden M van CD. $AB = 2p$; $BC = p$; $TM = p\sqrt{3}$.
a. Maak een duidelijke figuur en teken daarin nauwkeurig de rechte lijn PQ, die de rechten AT en BC loodrecht snijdt (P op AT en Q op BC).
b. Druk de lengte van het lijnstuk PQ in p uit.
c. Teken de doorsnede van de pyramide met het vlak, dat de tweevlakshoek, gevormd door de vlakken ABT en ABCD, middendoor deelt. Noem het snijpunt van TM met dit deelvlak S. Bewijs, dat S het zwaartepunt is van driehoek CDT.
d. Teken de lijn, die door B gaat en de kruisende lijnen PQ en TM snijdt. Noem het punt, waarin de gevonden lijn PQ snijdt, R.
e. Bewijs, dat BR = RS.

Vraagstukken uit: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jaargang 38, 1950-1951.
Deze vraagstukken kwamen voor op het Eindexamen der H.B.S.-B met 5-jarige cursus in 1950.

● Bijdrage ● ● ● ●

▶ Een convergente rij die op elke computer divergeert

M. C. van Hoorn

1. Aan het Zwitserse tijdschrift Elemente der Mathematik ontlenen wij het volgende voorbeeld. Het gaat om een rij die naar 0 convergeert. Wordt echter geprobeerd de limiet van de rij te benaderen met de hulp van een computer (of zakrekenmachine), dan lijkt de rij te divergeren.
De rij waarom het gaat wordt recursief gedefinieerd, en wel als volgt:
$x_1 = 1, x_n = e - n \cdot x_{n-1}$ ($n \geq 2$; e is het welbekende grondtal van de natuurlijke logaritme).
In Aufgabe 1005 vroeg R. Wyss het voornoemde voor deze rij te bewijzen (maart 1989). Een oplossing werd afgedrukt in het februari-nummer van 1990. Verscheidene lezers losten de opgave op, onder wie de Eindhovense groep O.P. Lossers en de Enschedese wiskundige A. A. Jagers.
In de door de redactie van Elemente der Mathematik afgedrukte oplossing speelt de afrondingsfout die de computer maakt inzake het getal e een grote rol. Laat ε deze fout zijn (positief of negatief).
Al werkend met de computer wordt nu niet de rij (x_n) verkregen, maar een rij (y_n), gedefinieerd door
$y_1 = 1, y_n = e + \varepsilon - n \cdot y_{n-1}$
Vervolgens wordt bewezen, dat de rij (y_n) divergeert voor elke $\varepsilon \neq 0$, en convergeert voor $\varepsilon = 0$. In dit laatste geval hebben we juist te maken met de rij (x_n).

2. Aan onze mederedacteur Rob Bosch danken wij de hierna volgende uiteenzetting omtrent de rij (y_n).
We starten met de rij (y_n), zoals gezegd gedefinieerd door
$y_1 = 1, y_n = (e + \varepsilon) - n \cdot y_{n-1}$ ($n \geq 2$).
Schrijven we dit als
$\frac{y_n}{n!} = \frac{e+\varepsilon}{n!} - \frac{y_{n-1}}{(n-1)!}$, en definiëren we $z_n = \frac{y_n}{n!}$, dan hebben we een rij (z_n) gekregen die voldoet aan
$z_1 = 1, z_n = \frac{(e+\varepsilon)}{n!} - z_{n-1}$ ($n \geq 2$).
Er volgt nu gemakkelijk

$$z_n = \frac{(e+\varepsilon)}{n!} - \frac{(e+\varepsilon)}{(n-1)!} + z_{n-2} = \ldots\ldots =$$
$$= \frac{(e+\varepsilon)}{n!} - \frac{(e+\varepsilon)}{(n-1)!} + \ldots\ldots + (-1)^n \cdot \frac{(e+\varepsilon)}{2!} +$$
$$+ (-1)^{n+1} =$$
$$= (e+\varepsilon) \cdot \left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} + \ldots\ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2!}\right] +$$
$$+ (-1)^{n+1}$$

Met gebruikmaking van de reeksontwikkeling van e^{-1}, te weten $e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots\ldots$, volgt dan

$$z_n = (e+\varepsilon) \cdot$$
$$\cdot \left[(-1)^n \cdot e^{-1} + \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + \ldots\ldots\right)\right] +$$
$$+ (-1)^{n+1} =$$
$$= (-1)^n + \varepsilon \cdot e^{-1} \cdot (-1)^n + (-1)^{n+1} +$$
$$+ (e+\varepsilon) \cdot \left[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + \ldots\ldots\right] =$$
$$= \frac{\varepsilon}{e} \cdot (-1)^n + (e+\varepsilon) \cdot \left[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + \ldots\ldots\right]$$

Omdat $y_n = n! \cdot z_n$ volgt hieruit

$$y_n = \frac{\varepsilon}{e} \cdot (-1)^n \cdot n! +$$
$$+ (e+\varepsilon) \cdot \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots\right]$$

Aangezien $0 < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots < \frac{1}{n+1}$

vinden we dat $\lim_{n \to \infty} |y_n| = 0$ als $\varepsilon = 0$, en $= +\infty$ als $\varepsilon \neq 0$.
Dit is juist wat we wilden bewijzen.

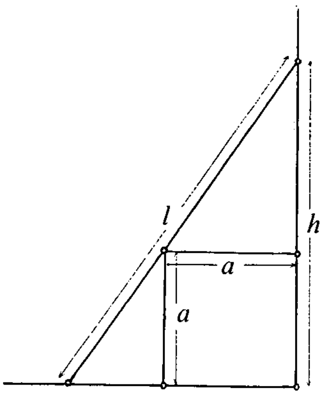
● Recreatie ● ● ● ●

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Jan de Geus, Valkenboslaan 262-A, 2563 EB Den Haag.

▶ Opgave 623

Van de problemen die je in de puzzelliteratuur steeds weer tegenkomt, is het probleem van de twee ladders, die elkaar kruisen in een steeg, het meest geliefd. Ook als puzzelredacteur is mij al een aantal keren door Euclideslezers dit probleem voorgelegd. Het aardige van dit probleem is waarschijnlijk dat het simpel oogt, maar in het algemeen een vierdegraads vergelijking oplevert, die slechts benaderde oplossingen toelaat.

Ook ons probleem levert in eerste instantie een vierdegraads vergelijking op:



Tegen een muur staat een ladder met lengte l. De hoek met de grond is groter dan 45°. Deze ladder raakt precies een vierkante doos met breedte a. Hoe hoog staat de ladder tegen de muur? Graag een *exacte* uitdrukking voor deze hoogte h!

Voor goede oplossingen (binnen een maand na verschijning ontvangen) ontvangt u 5 punten op uw eigen puzzelladder. Degene die op de bovenste trede staat ontvangt dan een boekenbon van *f*25,– en verliest hiermee zijn punten. Bij een volgende inzending begint hij dan aan een nieuwe beklimming.

▶ Oplossing 620

De 9 kinderen op het verjaardagsfeestje van m'n zoon Remco mochten spelletjes spelen op de computer. Ieder kind (1 t/m 9 en Remco) speelt één keer tegen elk ander kind. Elk kind speelt steeds een ander spelletje (A t/m I).
Is zo'n schema in 9 rondes (I t/m IX) haalbaar?

Ja!, schreven alle inzenders, met of zonder computer.
Zonder computer kan het zelfs zéér schematisch:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
I	R-1	8-9	6-4					3-7	2-5
II	3-6	R-2	9-1	7-5					4-8
III	5-9	4-7	R-3	1-2	8-6				
IV		6-1	5-8	R-4	2-3	9-7			
V			7-2	6-9	R-5	3-4	1-8		
VI				8-3	7-1	R-6	4-5	2-9	
VII					9-4	8-2	R-7	5-6	3-1
VIII	4-2					1-5	9-3	R-8	6-7
IX	7-8	5-3					2-6	1-4	R-9

Deze schitterende oplossing is ingezonden door *Willem van der Vegt* uit Zwolle. Hulde!
Gedeeltelijk heeft hij deze oplossing ontleend aan het 'Groot Schemaboek' van de Nederlandse Bridge Bond. Voor competitieleiders een onmisbaar boek.

Aangezien alle goede oplossers en de bedenker van dit probleem 5 punten op hun allereerste puzzelladder kregen, heb ik deze keer moeten loten voor de boekenbon van *f*25,–.
Uit de hoge hoed kwam te voorschijn:
Dick Buijs, Lutterveldsestraat 14, 4012 DE Kerk-Avezaath.
U heeft weer 0 punten. Maar ik hoop dat de boekenbon dit verlies van punten weer goedmaakt.

▶ Nabetrachting opgave 612

Bij de oplossing van opgave 612 (Euclides 5, januari 1990) schreef ik dat het nog steeds onbekend was op hoeveel manieren het doosje 'Beat the computer, no. 6' te vullen was met de 12 hexiamonds.
Gustaaf Lahousse uit Grimbergen heeft zich deze opmerking aangetrokken en is aan het programmeren geslagen. Na vele uren (dagen?) rekenen heeft de computer (schrik niet) 5885 verschillende manieren gevonden om het doosje te vullen.
Hartelijk dank voor deze informatie!

Boekbespreking

Sandor Klein, *The Effects of Modern Mathematics*, Akademiai Kiado, Budapest, $ 48.00, blz. 436.

De ideeën van Zoltan P. Dienes over het leren van moderne wiskunde zijn reeds uit de zeventiger jaren bekend. Tussen 1969 en 1974 zijn er in Hongarije, Canada, de V.S. en Brazilië experimenten met deze methode uitgevoerd en geëvalueerd.
In dit boek worden deze projecten (voor leerlingen tussen 6 en 12 jaar) beschreven. Aan de hand van een 13-tal hypothesen worden de psychologische effecten van deze manier van werken onderzocht. Naast de experimenteergroep werd steeds een controlegroep gebruikt.
In het kort zijn de onderzochte hypothesen:
1. Hoewel er minder tijd aan traditionele onderwerpen is besteed, is de kennis van de experimenteergroep op dat gebied niet minder.
2. De leerlingen in de experimenteergroep krijgen een grote kennis op het gebied van de moderne wiskunde.
3. De experimenteergroep is minder vermoeid van de wiskundeles dan de controlegroep.
De Dienes methode:
4. Vergroot de oplettendheid bij de leerlingen.
5. Bevordert de creativiteit.
6. Ontwikkelt de leervaardigheid.
7. Vermindert de perseverantie.
8. Vergroot de mogelijkheid tot sociale contacten.
9. Bevordert een positieve houding t.o.v. de wiskundelessen.
10. Vermindert de angst van leerlingen voor wiskunde.
11. Vergroot de prestatiegerichtheid (motivatie).
12. Verbetert de 'problem-solving' capaciteit.
13. Beïnvloedt de persoonlijkheid van de leerling in positieve zin.

De laatste tien punten zijn alle bedoeld t.o.v. traditionele methoden. Bij het project in New York was de fundamentele vraag: bestaat er verschil tussen een privéschool (New York) en een openbare school (Quebec) t.a.v. de onderzochte hypothesen?
Resultaten:
Bij het Budapester experiment werden 'bewijzen' gevonden, die alle hypothesen, behalve nr. 4, ondersteunden. Bij het Sherbrook-project (Canada) waren de resultaten minder scherp omlijnd dan in Budapest, maar stemden toch tot tevredenheid.
Bij het Porto Alegre-project werden alle hypothesen bevestigd.
Bij het onderzoek in New York kwamen de leerlingen daar beter uit de bus dan hun medescholieren in Canada.
Inhoudsoverzicht: In deel I (110 pag.) wordt een korte inhoudelijke beschrijving van de 'New Math' besproken. Ook leerdoelen en de gebruikte onderwijs methoden komen aan de orde. Verder een beschrijving van de vier projecten en een vraaggesprek met Zoltan Dienes. Deel II (60 pag.) geeft enige algemene informatie over de mogelijkheden en moeilijkheden van psychologische evaluaties van pedagogische projecten. Ook het ontwerp en de structuur van de evaluaties komen aan de orde. Deel III (200 pag.) bevat de gedetailleerde resultaten van het onderzoek. In een aanhangsel worden een aantal van de gegeven toetsen met elkaar vergeleken.

Ton Vandeberg

Verschenen

A. Bertram: *Axiomatische Einführung in die Kontinuumsmechanik*; B. I. Wissenschaftsverlag Mannheim; 36 DM; 288 blz.
Na een expositie van de benodigde mathematische begrippen (i.h.b. lineaire afbeeldingen en Euclidische variëteiten) in het eerste deel, worden in het tweede deel op streng axiomatische wijze de grondbeginselen van de continuumsmechanica afgeleid. Het derde deel besteedt aandacht aan materialentheorie.

R. Bruske e.a.: *Kommutative algebra*; B. I. Wissenschaftsverlag Mannheim; 38 DM; 288 blz.
In dit boek wordt de theorie van commutatieve ringen en modulen over commutatieve ringen uiteengezet. Als voorkennis wordt alleen enige kennis van groepen en ringen verondersteld. Enkele trefwoorden: Noetherse ringen; Hilbert-Samuel-polynoom; ringuitbreidingen; homologische dimensie; Cohen-Macaulay-ringen en -modulen.

Kalender

5 januari 1991: Amersfoort, Wintersymposium Wiskundig Genootschap. Zie Euclides 65, 3 blz. 70.
9 januari 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
8 en 9 februari 1991: Garderen, Wiskunde A-lympiade.
20 februari 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.
1 maart 1991: Op de scholen voor havo en vwo, Eerste ronde Wiskunde Olympiade.
13 maart 1991: Utrecht, Bestuursvergadering NVvW.

Inhoud